PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 27 : du 12 au 16 mai 2025

Intégrale d'une fonction continue.

1. Subdivision d'un segment, fonction en escalier et intégrale d'une fonction en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$.
   Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, la valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue.
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
   Définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
   Linéarité, positivité, croissance. La valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue. Relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Une fonction f continue et de signe constant sur un segment $[a, b]$ est nulle sur $[a, b]$ si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$. Corollaires.
4. Somme de Riemann pour une subdivision régulière.
   Dans le cas d'une fonction continue, convergence vers l'intégrale quand le pas tend vers 0.
5. Rappels : Pour une fonction f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour a dans I, $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est définie, continue et dérivable sur I et $F_a' = f$ sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   Les primitives de f sont égales entre elles à une constante additive près. Primitives des fonctions usuelles.
   Calcul d'intégrales à l'aide de primitives, intégration par parties. Intégration d'un développement limité.
6. Changement de variable.
7. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
8. Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes, propriétés.
9. Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles, des trapèzes.
   Domination de l'erreur dans le cas de fonctions de classe C^1 et C^2 respectivement.

Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
   Théorème de la base extraite.
   Si E est non nul et de dimension finie, E admet au moins une base et toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs. Dimension. Par convention $dim(\{\vec{0}\}) = 0$. Caractérisation des bases en dimension finie.
2. Dimension et base d'un espace vectoriel produit de deux espaces vectoriels de dimension finie non nulle.
   Base canonique et dimensions des espaces vectoriels usuels. Cas de $\mathbb{C}$.
3. Si E est non nul et de dimension finie n, coordonnées et matrice d'un vecteur dans une base. Isomorphismes entre $\mathbb{K}^n$ et E, entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
4. Le rang d'une famille finie S de vecteurs d'un espace vectoriel quelconque est la dimensions de $\text{Vect}(S)$. Propriétés.
   <u>En dimension finie</u>, calcul du rang à l'aide de la matrice des vecteurs de S dans une base.
5. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie inférieure ou égale à n. $dim(F) = n$ si, et seulement si $F = E$.
   Définition de droite, plan, hyperplan.
   Théorème de la base incomplète.
6. Si $B = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k) \oplus \text{Vect}(\vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n) = E$.
   Tout sous-espace vectoriel de E a un supplémentaire dans E.
   Pour deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
   Caractérisation des supplémentaires à l'aide de la dimension.
   Base de E adaptée à $F \oplus G$ (dans cet ordre) pour deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls de E.
7. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie : formule de Grassmann.