PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 28 : du 19 au 23 mai 2025

Espaces vectoriels de dimension finie.

1. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
   Théorème de la base extraite.
   Si E est non nul et de dimension finie, E admet au moins une base et toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs. Dimension. Par convention $dim(\{\vec{0}\}) = 0$. Caractérisation des bases en dimension finie.
2. Dimension et base d'un espace vectoriel produit de deux espaces vectoriels de dimension finie non nulle.
   Base canonique et dimensions des espaces vectoriels usuels. Cas de $\mathbb{C}$.
3. Si E est non nul et de dimension finie n, coordonnées et matrice d'un vecteur dans une base. Isomorphismes entre $\mathbb{K}^n$ et E, entre E et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Matrice d'une famille de vecteurs dans une base.
4. Le rang d'une famille finie S de vecteurs d'un espace vectoriel quelconque est la dimensions de $\text{Vect}(S)$. Propriétés.
   <u>En dimension finie</u>, calcul du rang à l'aide de la matrice des vecteurs de S dans une base.
5. Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie inférieure ou égale à n. $dim(F) = n$ si, et seulement si $F = E$.
   Définition de droite, plan, hyperplan.
   Théorème de la base incomplète.
6. Si $B = (\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n)$ est une base de E alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_k) \oplus \text{Vect}(\vec{e}_{k+1}, ..., \vec{e}_n) = E$.
   Tout sous-espace vectoriel de E a un supplémentaire dans E.
   Pour deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E, $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
   Caractérisation des supplémentaires à l'aide de la dimension.
   Base de E adaptée à $F \oplus G$ (dans cet ordre) pour deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls de E.
7. Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels en dimension finie : formule de Grassmann.

Applications linéaires en dimension finie.

E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ et F un espace vectoriel non nul.

1. Si $u \in L(E, F)$, alors
   i) $u(B) = (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \cdots, u(\vec{e}_n))$ engendre $\text{Im}(u)$.
   ii) u est surjective si et seulement si $u(B)$ engendre F.
   iii) u est injective si et seulement si $u(B)$ est une famille libre de F.
   Conséquences sur la comparaison des dimensions.
2. $u \in L(E, F)$ est bijective si et seulement si $u(B)$ est une base de F.
   Si u est un isomorphisme de E dans F, alors F est de dimension finie et $dim(F) = dim(E) = n$.
   L'application $\mathbb{K}^n \to E\,;\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.
   En dimension finie, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si $dim(E) = dim(F)$.
   Caractérisation des isomorphismes en dimension finie : si $dim(E) = dim(F) = n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $u \in L(E, F)$, u est un isomorphisme si et seulement si u est injective si et seulement si u est surjective.
3. Si E est de dimension finie non nulle, $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par l'image d'une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ de E et l'application $L(E, F) \to F^n\,;\ u \mapsto B = \big(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \cdots, u(\vec{e}_n)\big)$ est un isomorphisme.
4. Rang d'une application linéaire, définitions et propriétés.
   Théorème du rang quand E et F sont de dimension finie.
   Dans ce cas, pour $u \in L(E, F)$, $rg(u) = Mat_{B'}(u(B))$, où B est une base de E et B' une base de F.
5. Cas des formes linéaires. Equation d'un hyperplan dans une base de E en dimension finie non nulle.
   Equations linéaires.
6. $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
   Forme géometrique du théorème du rang.
7. Homothéties, projections (projecteurs) et symétries vectorielles : définitions et propriétés.