PCSI 24/25 - Programme de colle de Mathématiques n° 29 : du 2 au 6 juin 2025

Applications linéaires en dimension finie.

E est un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ et F un espace vectoriel non nul.

1. Si $u \in L(E, F)$, alors
   i) $u(B) = (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \cdots, u(\vec{e}_n))$ engendre $\mathrm{Im}(u)$.
   ii) u est surjective si et seulement si $u(B)$ engendre F.
   iii) u est injective si et seulement si $u(B)$ est une famille libre de F.

   Conséquences sur la comparaison des dimensions.
2. $u \in L(E, F)$ est bijective si et seulement si $u(B)$ est une base de F.
   Si u est un isomorphisme de E dans F, alors F est de dimension finie et $dim(F) = dim(E) = n$.

   L'application $\mathbb{K}^n \to E\,;\, (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.

   En dimension finie, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si $dim(E) = dim(F)$.

   Caractérisation des isomorphismes en dimension finie : si $dim(E) = dim(F) = n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $u \in L(E, F)$, u est un isomorphisme si et seulement si u est injective si et seulement si u est surjective.
3. Si E est de dimension finie non nulle, $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par l'image d'une base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$ de E et l'application $L(E, F) \to F^n\,;\, u \mapsto B = \big(u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \cdots, u(\vec{e}_n)\big)$ est un isomorphisme.
4. Rang d'une application linéaire, définitions et propriétés.
   Théorème du rang quand E et F sont de dimension finie.
   Dans ce cas, pour $u \in L(E, F)$, $rg(u) = Mat_{B'}(u(B))$, où B est une base de E et B' une base de F.
5. Cas des formes linéaires. Equation d'un hyperplan dans une base de E en dimension finie non nulle.

   Equations linéaires.
6. $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
   Forme géométrique du théorème du rang.
7. Homothéties, projections (projecteurs) et symétries vectorielles : définitions et propriétés.
8. Matrice d'une application linéaire, propriétés, coordonnées de l'image d'un vecteur.
9. Cas des isomorphismes.
10. En dimension finie, base adaptée à une projection vectorielle, une symétrie vectorielle.

Séries

1. Séries numériques réelles et complexes. Sommes partielles, convergence, somme de la série. Séries tronquées. Linéarité. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, divergence grossière.
   Lien suite-série : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1} - u_n)$ converge.

   Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente si, et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} Im(u_n)$ sont convergentes. Lien entre les sommes.
2. Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs ($\leqslant$, $\mathcal{O}$, $\sim$).
   Comparaison entre série et intégrale pour une fonction positive continue et monotone. Application à la divergence de la série harmonique.
   Développement décimal propre d'un réel positif x (sans démonstration).
3. Séries absolument convergentes, suites sommables. Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si, et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} Im(u_n)$ sont absolument convergentes.

   Une série absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire pour les séries.

   Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série réelle ou complexe et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ une série à termes positifs, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
4. Séries de référence : harmonique, géométriques, de Riemann, exponentielles.