PCSI 24/25 - Dernier programme de colle de Mathématiques de l'année scolaire : du 9 au 13 juin 2025

Pensez à déplacer la colle de lundi !

Séries

1. Séries numériques réelles et complexes. Sommes partielles, convergence, somme de la série. Séries tronquées. Linéarité. Le terme général d'une série convergente tend vers 0, divergence grossière.
   Lien suite-série : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

   Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente si, et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} Im(u_n)$ sont convergentes. Lien entre les sommes.
2. Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs ($\leqslant$, $\mathcal{O}$, $\sim$).
   Comparaison entre série et intégrale pour une fonction positive continue et monotone. Application à la divergence de la série harmonique.
   Développement décimal propre d'un réel positif x (sans démonstration).
3. Séries absolument convergentes, suites sommables. Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente si, et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} Im(u_n)$ sont absolument convergentes.

   Une série absolument convergente est convergente. Inégalité triangulaire pour les séries.

   Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est une série réelle ou complexe et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ une série à termes positifs, si $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathcal{O}(v_n)$ et si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est absolument convergente, donc convergente.
4. Séries de référence : harmonique, géométriques, de Riemann, exponentielles.

Changement de base dans un espace vectoriel.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles.

1. Définition et propriétés du rang d'une matrice. Invariances et calcul du rang.
2. Caractérisation d'une base B' à l'aide de sa matrice dans une base B, définition et propriétés de la matrice de passage $P_{B,B'}$ de B à B'. Relation de changement de base dans un espace vectoriel.
3. Matrice d'une application linéaire f relative à des bases : notation $Mat_{B',B}(f)$ si B est une base de l'espace de départ et B' une base de l'espace d'arrivée.
   Relation de changement de base pour les applications linéaires. Cas des endomorphismes.

Déterminant.

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier naturel non nul.

1. Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ qui est linéaire par rapport à chacune des colonnes de sa variable, antisymétrique par rapport aux colonnes de sa variable et qui vérifie que $f(I_n) = 1$.
   Cette application f est appelée déterminant et notée det. Notation $|a_{i,j}|_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ pour une matrice $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
2. Propriétés du déterminant : si deux colonnes d'une matrice sont colinéaires, le déterminant est nul.
   Opération sur les colonnes d'un déterminant.
   Déterminant d'une matrice triangulaire ou triangulaire par blocs.
   Déterminant d'un produit de matrices, de la transposée d'une matrice.
   Une matrice est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. Déterminant de l'inverse.
3. Développement du déterminant par rapport à une de ses colonnes ou de ses lignes.
   Pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, définition de la matrice $A_{i,j}$ obtenue en supprimant la i-ième ligne et la j-ième colonne de A, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.

   Développement du déterminant de A par rapport à

   - une colonne de A : pour tout $j \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{i,j}\, det(A_{i,j})$

   - une ligne de A : pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $\det(A) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j} a_{i,j}\, det(A_{i,j})$.
4. Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Propriétés.
   Caractérisation des bases avec le déterminant.
   Déterminant d'un endomorphisme.
   Caractérisation des automorphismes avec le déterminant.
   Utilisation du déterminant pour trouver une équation d'un hyperplan vectoriel dans une base.