PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 4 : du 6 au 12 octobre 2025

Petit rappel : pour avoir la moyenne, il est nécessaire de connaître parfaitement les définitions et propositions du cours correspondant au programme de la semaine. Cette condition n'est pas suffisante, vous pouvez malgré cela avoir une note sous la moyenne en cas de lacunes ou erreurs importantes.
Les démonstrations peuvent être posées en exercice et notées en tant que tel. La plupart d'entre elles n'ont pas été faites en classe.

Nombres complexes .

1. Forme algébrique d'un complexe. Opérations dans $\mathbb{C}$.
   Partie réelle, imaginaire, conjugué, module : définition et propriétés, dont l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
   Inverse d'un complexe non nul.
2. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Argument d'un complexe de module 1.
   Notation d'Euler, formules (relations) d'Euler et formule de Moivre.
   Argument et forme trigonométrique d'un complexe non nul : définition et propriétés.
3. Plan complexe. Interprétation géométrique des complexes.
   Affixe z_M d'un point M, image $M(z)$ d'un complexe z. Affixe d'un vecteur, vecteur image d'un complexe.
   Interprétation géométrique du module et d'un argument d'un complexe non nul, de l'ensemble $\mathbb{U}$.
4. Formules de l'angle moitié : à connaître ou savoir retrouver rapidement.
5. Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $A\cos(x - \varphi)$ en utilisant le complexe $z = a + ib$.
6. Définition générale d'équation algébrique. Racine a d'une fonction polynomiale P, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Une fonction polynomiale P de degré n admet au plus n racines distinctes.
7. Racines carrées d'un complexe non nul.
   Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$. Lien entre coefficients et solutions. Cas réel.
   Pour S et P donnés dans $\mathbb{C}$, les solutions du système $\left\{\begin{array}{l} x + y = S \\ xy = P \end{array}\right.$ d'inconnue (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ s'obtiennent avec les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$, d'inconnue z.
8. Relation entre angles orientés du plan et arguments de complexes.
   Conditions d'alignement, d'orthogonalité dans le plan à l'aide des affixes.
   Equation cartésienne d'un cercle et caractérisation à l'aide des complexes.
9. Racines n-ièmes d'un complexe a pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$. Cas de 0.
   Si $a \neq 0$, détermination de ses racines n-ièmes avec sa forme trigonométrique.
   Racines n-ièmes de l'unité. Forme $\exp(2ik\pi/n)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, à connaître.
   Un complexe ω différent de 1 est une racine n-ième de l'unité si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
   Les solutions complexes de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$ sont les racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.
   La somme des n racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.