PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 5 : du 13 au 19 octobre 2025

Nombres complexes .

1. Forme algébrique d'un complexe. Opérations dans $\mathbb{C}$.
   Partie réelle, imaginaire, conjugué, module : définition et propriétés, dont l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$.
   Inverse d'un complexe non nul.
2. Ensemble $\mathbb{U}$ des nombres complexes de module 1. Argument d'un complexe de module 1.
   Notation d'Euler, formules (relations) d'Euler et formule de Moivre.
   Argument et forme trigonométrique d'un complexe non nul : définition et propriétés.
3. Plan complexe. Interprétation géométrique des complexes.
   Affixe z_M d'un point M, image $M(z)$ d'un complexe z. Affixe d'un vecteur, vecteur image d'un complexe.
   Interprétation géométrique du module et d'un argument d'un complexe non nul, de l'ensemble $\mathbb{U}$.
4. Formules de l'angle moitié : à connaître ou savoir retrouver rapidement.
5. Transformation de $a\cos(x) + b\sin(x)$ en $A\cos(x - \varphi)$ en utilisant le complexe $z = a + ib$.
6. Définition générale d'équation algébrique. Racine a d'une fonction polynomiale P, factorisation de $P(z)$ par $z - a$. Une fonction polynomiale P de degré n admet au plus n racines distinctes.
7. Racines carrées d'un complexe non nul.
   Résolution des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$. Lien entre coefficients et solutions. Cas réel.
   Pour S et P donnés dans $\mathbb{C}$, les solutions du système $\begin{cases} x + y = S \\ xy = P \end{cases}$ d'inconnue (x, y) dans $\mathbb{C}^2$ s'obtiennent avec les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 - Sz + P = 0$, d'inconnue z.
8. Relation entre angles orientés du plan et arguments de complexes.
   Conditions d'alignement, d'orthogonalité dans le plan à l'aide des affixes.
   Equation cartésienne d'un cercle et caractérisation à l'aide des complexes.
9. Racines n-ièmes d'un complexe a pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$. Cas de 0.
   Si $a \neq 0$, détermination de ses racines n-ièmes avec sa forme trigonométrique.
   Racines n-ièmes de l'unité. Forme $\exp(2ik\pi/n)$, avec $k \in \mathbb{Z}$, à connaître.
   Un complexe ω différent de 1 est une racine n-ième de l'unité si, et seulement si $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 0$.
   Les solutions complexes de l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z^k = 0$ sont les racines n-ièmes de l'unité distinctes de 1.
   La somme des n racines n-ièmes de l'unité est égale à 0.
10. Transformations du plan : définition générale, lien avec les transformations complexes associées.
    Cas à connaître : symétries orthogonales par rapports aux axes, à l'origine, translations, homothéties et rotations de centre O.
    Nature et éléments caractéristiques de ces transformations.

    Ont été données pour cette partie du cours les définitions générales relatives aux fonctions et applications en général, d'une application bijective et de sa réciproque, d'une application injective, surjective.
    Sont HORS PROGRAMME pour cette semaine et les suivantes toutes les QUESTIONS de cours GENERALES et tous les exercice généraux SUR LES FONCTIONS et APPLICATIONS.

Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Parties de $\mathbb{R}$ majorées, minorées, bornées. Cas de l'ensemble vide.
   Caractérisation des parties bornées.
   Segments de $\mathbb{R}$. Différents types d'intervalles. Propriété de convexité des intervalles.
2. Opérations sur les fonctions, composition.
3. Fonctions paires, impaires, périodiques : définitions et propriétés.
4. Fonctions monotones, définition et propriétés, opérations et composition, cas des fonctions constantes.
   Lien entre stricte monotonie et bijection.
5. Fonctions réelles majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant, maximum et minimum.