PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n°7 : du 10 au 16 novembre 2025

Fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$

1. Fonctions continues, dérivables, dérivées des fonctions usuelles.
   Limites usuelles en 0 obtenues avec la dérivée en 0.
2. Continuité et dérivabilité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires et ses deux corollaires.
   Théorème de la bijection et de la solution unique.
3. Théorèmes sur les fonctions dérivables : Lien dérivée-monotonie, théorème de la limite de la dérivée.
   Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.
4. Fonctions exponentielle et logarithme népérien.
   Logarithme et exponentielle de base a, ou a appartient à $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.

Primitives de fonctions réelles.

1. Primitives, intégrales et primitives de fonctions continues.
   Primitives à connaître : voir en fin de programme.
2. Intégration par parties : bien connaître et savoir appliquer le théorème.
3. Changement de variable.
   Application du changement de variable aux fonction paires, impaires, périodiques.
4. Première liste de primitives à connaître :

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}, \text{ pour } n \text{ dans } \mathbb{N}^*$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^*$$

$$\int \frac{1}{x^n} dx = \frac{-1}{(n-1)\, x^{n-1}} + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et } \mathbb{R}_-^*, \text{ pour } n \geqslant 2 \text{ entier}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\int e^x dx = e^x \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \tan(x) dx = -\ln|\cos(x)| \ + cste \qquad \text{sur }]-\pi/2 + k\pi ; \pi/2 + k\pi[, \text{ pour tout } k \text{ dans } \mathbb{Z}$$

$$\int \ln(x) dx = x\ln(x) - x \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}_+^*$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{Arctan}(x) \ + cste \qquad \text{sur } \mathbb{R}$$

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

NB : Les équations différentielles linéaires du premier ordre au programme sont celles du type :

(E) : $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Définitions générales : équation différentielle linéaire, second membre, solution d'une équation différentielle, équation différentielle linéaire homogène (dite aussi sans second membre)
2. Théorème de structure : (E) admet des solutions sur I. La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.

3. Résolution de (E_0) sur l'intervalle I. Cas où a est une fonction constante.
4. Solution particulière de (E) sur l'intervalle I. Méthode de variation de la constante.

   Solution générale de $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle I.

   Principe de superposition des solutions.
   Pour x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.
5. Si $c : I \to \mathbb{R}$ est continue, on sait résoudre $c(x)y' + a(x)y = b(x)$ sur tout intervalle inclus dans I sur lequel c ne s'annule jamais.

   Attention, la résolution SUR I est HORS PROGRAMME quand c S'ANNULE au moins une fois dans I.