PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n°8 : du 17 au 23 novembre 2025

Equations différentielles linéaires du premier ordre.

NB : Les équations différentielles linéaires du premier ordre au programme sont celles du type :

(E) : $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$, I étant un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point.

1. Définitions générales : équation différentielle linéaire, second membre, solution d'une équation différentielle, équation différentielle linéaire homogène (dite aussi sans second membre)
2. Théorème de structure : (E) admet des solutions sur I. La solution générale de (E) sur I est la somme d'une solution particulière de (E) et de la solution générale de l'équation homogène associée (E_0) : $y' + a(x)y = 0$.
3. Résolution de (E_0) sur l'intervalle I. Cas où a est une fonction constante.
4. Solution particulière de (E) sur l'intervalle I. Méthode de variation de la constante.

   Solution générale de $y' + a(x)y = b(x)$ sur l'intervalle I.

   Principe de superposition des solutions.

   Pour x_0 dans I et y_0 dans $\mathbb{R}$, le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(x)y = b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$ admet une unique solution sur I.
5. Si $c : I \to \mathbb{R}$ est continue, on sait résoudre $c(x)y' + a(x)y = b(x)$ sur tout intervalle inclus dans I sur lequel c ne s'annule jamais.

Fonctions et applications.

1. Pour deux ensembles non vides E et F, une fonction f de E dans F associe à chaque élément x de E au plus un élément y de F, noté $f(x)$ et appelé l'image de x par f, x est appelé un antécédent de y par f.

   E est l'ensemble de départ et F celui d'arrivée de f. Notation : $f : x \to f(x)$ de E dans F.
   Domaine de définition.
2. f est appelée une application de E dans F si f associe à chaque élément x de E exactement un élément y de F.
   Le vocabulaire est le même que pour les fonctions.
   Dans le cas d'une application, l'ensemble de départ est toujours le domaine de définition. Une des écritures de cette application est : $f : \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto f(x) \end{array}$.

   L'ensemble des applications de E dans F est noté $\mathcal{F}(E, F)$.
3. Ensemble image de E, noté $f(E)$, ensemble image d'une partie A de E, notée $f(A)$. Egalité de deux applications, application composée.
   Ensemble image d'une partie A de E, notée $f(A)$.
4. Egalité de deux fonctions, de deux applications.
   Composition de deux applications.
5. Définition d'une bijection f de E dans F : chaque élément de F a exactement un antécédent par f dans E.

   Caractérisation d'une bijection et définition de sa réciproque. Notation fréquente f^{-1} pour la réciproque.
   La composée de deux bijections est une bijection.
   Définition et propriétés d'une permutation de E. Ensemble $\mathcal{B}(E)$ des permutations de E.
6. Restriction et prolongement d'une application. Bijection définie par une application.
7. Cas où $E = F$.
   Ensemble $\mathrm{Inv}(f) = \{x \in E \,|\, f(x) = x\}$ des éléments de E invariants par f, appelé l'invariant de f.
   Une partie non vide A de E est dite stable par f si $f(A) \subset A$.

   Dans ce cas, $g : \begin{array}{l} A \to f(A) \\ x \mapsto f(x) \end{array}$ est bien définie, on l'appelle l'application induite par f sur A.

   A est globalement invariante par f si $f(A) = A$.
8. Image réciproque d'une partie B de F par f. Notation provisoire $f^{<-1>}(B)$.
   Propriétés de l'image directe de parties de E et de l'image réciproque de parties de F.
9. Applications injectives et surjectives. Propriétés de la composition.