

**Sommes et produits de réels et complexes.**

1. Sommes et produits finis de réels ou complexes. Factorielle d'un entier naturel  $n$ .  
Linéarité de la somme. Inégalité triangulaire généralisée. Dans  $\mathbb{R}$ , compatibilité avec  $\leqslant$ .
2. Changement d'indice du type  $j = k - q$  ou  $j = q - k$ , où  $q$  est un entier fixé.  
Sommes et produits télescopiques.
3. Sommes à connaître :  $\sum_{k=1}^n i, \sum_{k=1}^n i^2, \sum_{k=1}^n i^3$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .  
Pour  $p \leqslant n$  dans  $\mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=p}^n u_k$  pour une suite arithmétique  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k$  et  $\sum_{k=p}^n q^k$  pour un réel ou complexe  $q$ .  
Factorisation de  $a^n - b^n$  par  $a - b$ , pour  $a$  et  $b$  dans  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $n \geqslant 2$  dans  $\mathbb{N}$ .
4. Partie entière d'un réel.
5. Regroupement de termes dans une somme. Cas des indices pairs et impairs.
6. Définition des coefficients binomiaux avec des factorielles. Propriétés.  
Formule du binôme de Newton sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  (admise). Valeur de la somme des coefficients binomiaux.
7. Révision par des exemples sur les récurrences simples, doubles et fortes.
8. Sommes doubles, règle de Fubini, produit de deux sommes, sommes triangulaires, carré d'une somme.
9. Application aux sommes en cosinus et sinus : pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,
  - calcul de  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$  et  $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ ,
  - calcul de  $\cos(nx)$  et  $\sin(nx)$ ,
  - linéarisation de  $\cos^n(x)$  et  $\sin^n(x)$ .
10. Révisions : pour  $n$  dans  $\mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$  : racines  $n$ -ièmes de l'unité, d'un complexe  $a$  non nul.

**Suites numériques réelles.**

1. Rappel des définitions de parties de  $\mathbb{R}$  majorée, minorée, bornée, de maximum et minimum.  
Borne supérieure, inférieure d'une partie de  $\mathbb{R}$  : définition, existence pour toute partie non vide majorée, resp. non vide minorée de  $\mathbb{R}$ , et caractérisation (résultats admis).  
 $\inf([0, +\infty]) = 0$  (démontré), d'où le principe de démonstration : un réel  $a$  est négatif ( $a \leqslant 0$ ) s'il est plus petit que tout réel strictement positif, et ses corollaires.
2. Densité de  $\mathbb{Q}$  et  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  dans  $\mathbb{R}$  (hors programme - admis).
3. Définition d'une suite numérique réelle comme application de  $A$  dans  $\mathbb{R}$ , où  $A$  est une partie infinie de  $\mathbb{N}$ .  
Notation  $u = (u_n)_{n \in A}$ . Ensemble  $\mathbb{R}^A$ .  
*Les définitions et propriétés sont données pour des suites de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .*
4. Définition et propriétés des opérations sur les suites numériques réelles.  
(La structure algébrique de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  n'est pas au programme).  
Comparaison de deux suites : pour  $u$  et  $v$  dans  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ,  $u \leqslant v$  si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$  et  $u < v$  si  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$ .
5. Suites monotones.  
Suites majorées, minorées, bornées. Borne supérieure, inférieure, minimum, maximum d'une suite.  
Définition des suites tronquées et suites extraites.
6. Définition d'une propriété  $P(n)$  dépendant d'une variable  $n$  de  $\mathbb{N}$  vraie pour  $n$  assez grand (ou : à partir d'un certain rang).  
Pour  $x_0 \in \mathbb{R}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$  (resp.  $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ ) est l'intervalle ouvert (resp. fermé) centré en  $x_0$  de rayon  $\alpha$ . Ce sont des voisinages de  $x_0$ , respectivement ouvert et fermé.  
 $x_0$  est un élément ou une borne d'un intervalle  $I$  si, et seulement si, tout voisinage de  $x_0$  rencontre  $I$ .  
Définition d'une propriété  $P(x)$  dépendant d'une variable  $x$  de  $\mathbb{R}$  vraie au voisinage de  $x_0$ , de  $+\infty$ , de  $-\infty$ .
7. Droite achevée  $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ .
8. Définition d'une suite convergente, divergente. Limite finie, infinie d'une suite. Unicité de la limite.  
Limite par valeurs supérieures, inférieures.  
Opérations sur les limites de suites réelles.  
Limite de la composée d'une suite par une fonction numérique réelle.

9. Suites extraites. Pour  $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ , toute suite extraite d'une suite réelle  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de limite  $\ell$  a pour limite  $\ell$ . Si les suites extraites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  ont la même limite  $\ell$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  a pour limite  $\ell$ .
10. Limites des suites  $(n^b)$  où  $b \in \mathbb{R}$ .  
Cas de convergence et de divergence des suites des suites géométriques  $(q^n)$  où  $q \in \mathbb{R}^*$ .  
Théorèmes de croissances comparées pour les suites.
11. Théorèmes de comparaison, d'encadrement (des gendarmes), de la limite monotone.  
Si  $(u_n)$  converge vers  $\ell > 0$ , alors  $u_n > 0$  pour  $n$  assez grand.  
Théorèmes de majoration :  $(u_n)$  converge vers 0 si et seulement si  $(|u_n|)$  converge vers 0.  
Une suite produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge aussi vers 0.  
Si  $|u_n| \leq v_n$  pour  $n$  assez grand et si  $(v_n)$  converge vers 0, alors  $(u_n)$  converge vers 0.
12. Définition de suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes : deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.  
Exemple : Valeur décimale approchée par défaut, par excès d'un réel à  $10^{-n}$  près.
13. Suites récurrentes du type " $u_{n+1} = f(u_n)$ ". On admet que si  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  stable par une fonction réelle  $f$  et si  $a$  est un élément de  $I$ , il existe alors une unique suite  $u$  de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 = a$  et  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  et que cette suite  $u$  est à valeurs dans  $I$  (démonstration faite, à savoir refaire dans un cas concret).  $f$  est appelée la fonction itératrice de la suite  $u$ .  
N.B. : Il n'y a aucun autre résultat général sur ces suites dans le programme de PCSI.  
Etude sur des exemples où  $f$  est monotone sur  $I$ .
14. Relations de comparaison : Suites dominées par  $v$ , négligeables devant  $v$ , équivalentes à  $v$ , où  $v$  est une suite dont tous les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.  
Propriétés, comparaison des puissances de  $n$ , théorèmes de croissances comparées (sous forme de limite et avec la relation de prépondérance).

Mes meilleurs vœux pour l'année 2026 !