PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n°14 : du 12 au 18 janvier 2026

Suites numériques réelles.

1. Rappel des définitions de parties de $\mathbb{R}$ majorée, minorée, bornée, de maximum et minimum.

   Borne supérieure, inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$: définition, existence pour toute partie non vide majorée, resp. non vide minorée de $\mathbb{R}$, et caractérisation (résultats admis).
   $\inf(]0,+\infty[) = 0$ (démontré), d'où le principe de démonstration : un réel a est négatif ($a \leqslant 0$) s'il est plus petit que tout réel strictement positif, et ses corollaires.
2. Densité de $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (hors programme - admis).
3. Définition d'une suite numérique réelle comme application de A dans $\mathbb{R}$, où A est une partie infinie de $\mathbb{N}$. Notation $u = (u_n)_{n \in A}$. Ensemble $\mathbb{R}^A$.

   Les définitions et propriétés sont données pour des suites de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
4. Définition et propriétés des opérations sur les suites numériques réelles.
   (La structure algébrique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ n'est pas au programme).

   Comparaison de deux suites : pour u et v dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $u \leqslant v$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et $u < v$ si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < v_n$.
5. Suites monotones.
   Suites majorées, minorées, bornées. Borne supérieure, inférieure, minimum, maximum d'une suite.
   Définition des suites tronquées et suites extraites.
6. Définition d'une propriété $P(n)$ dépendant d'une variable n de $\mathbb{N}$ vraie pour n assez grand (ou : à partir d'un certain rang).

   Pour $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\left]x_0-\alpha, x_0+\alpha\right[$ (resp. $\left[x_0-\alpha, x_0+\alpha\right]$) est l'intervalle ouvert (resp. fermé) centré en x_0 de rayon α. Ce sont des voisinages de x_0, respectivement ouvert et fermé.
   x_0 est un élément ou une borne d'un intervalle I si, et seulement si, tout voisinage de x_0 rencontre I.
   Définition d'une propriété $P(x)$ dépendant d'une variable x de $\mathbb{R}$ vraie au voisinage de x_0, de $+\infty$, de $-\infty$.
7. Droite achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
8. Définition d'une suite convergente, divergente. Limite finie, infinie d'une suite. Unicité de la limite.
   Limite par valeurs supérieures, inférieures.
   Opérations sur les limites de suites réelles.
   Limite de la composée d'une suite par une fonction numérique réelle.
9. Suites extraites. Pour $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute suite extraite d'une suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de limite ℓ a pour limite ℓ.
   Si les suites extraites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ont la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour limite ℓ
10. Limites des suites (n^b) où $b \in \mathbb{R}$.
    Cas de convergence et de divergence des suites des suites géométriques (q^n) où $q \in \mathbb{R}^*$.
    Théorèmes de croissances comparées pour les suites.
11. Théorèmes de comparaison, d'encadrement (des gendarmes), de la limite monotone.
    Si (u_n) converge vers $\ell > 0$,alors $u_n > 0$ pour n assez grand.
    Théorèmes de majoration : (u_n) converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)$ converge vers 0.
    Une suite produit d'une suite bornée et d'une suite convergeant vers 0 converge aussi vers 0.
    Si $|u_n| \leqslant v_n$ pour n assez grand et si (v_n) converge vers 0, alors (u_n) converge vers 0.
12. Définition de suites adjacentes. Théorème des suites adjacentes : deux suites adjacentes sont convergentes et admettent la même limite.

    Exemple : Valeur décimale approchée par défaut, par excès d'un réel à 10^{-n} près.
13. Suites récurrentes du type "$u_{n+1} = f(u_n)$". On admet que si I un intervalle de $\mathbb{R}$ stable par une fonction réelle f et si a est un élément de I, il existe alors une unique suite u de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et que cette suite u est à valeurs dans I (démonstration faite, à savoir refaire dans un cas concret). f est appelée la fonction itératrice de la suite u.
    N.B. : Il n'y a aucun autre résultat général sur ces suites dans le programme de PCSI.
    Etude sur des exemples où f est monotone sur I.
14. Relations de comparaison : Suites dominées par v, négligeables devant v, équivalentes à v, où v est une suite dont tous les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.
    Propriétés, comparaison des puissances de n, théorèmes de croissances comparées (sous forme de limite et avec la relation de prépondérance).

Suites numériques complexes.

1. Définition. Opérations sur l'ensemble des suites complexes. Suites réelles associées. Suites bornées.
   Convergence d'une suite numérique complexe. Caractérisation : $(u_n)_{n \geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n \geqslant 0}$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n \geqslant 0}$ vers $\mathrm{Im}(\ell)$.
   La suite en modules d'une suite complexe convergente est convergente.
   Théorèmes d'opérations sur les limites de suites convergentes.
   Théorèmes de majoration.

2. Suites particulières :

   Suites constantes, stationnaires. Convergence.

   Suites arithmétiques. Somme de n termes consécutifs.

   Suites géométriques, cas de convergence. Cas de $(e^{i\alpha n})_{n\geqslant 0}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Somme de n termes consécutifs.

   Suites arithmético-géométriques.

   Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : expression du terme général à l'aide des solutions de l'équation caractéristique dans le cas complexe et dans le cas réel.