PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n°15 : du 19 au 25 janvier 2026

Suites numériques réelles.

1. Relations de comparaison : Suites dominées par v, négligeables devant v, équivalentes à v, où v est une suite dont tous les termes sont non nuls à partir d'un certain rang.

   Propriétés, comparaison des puissances de n, théorèmes de croissances comparées (sous forme de limite et avec la relation de prépondérance).

Suites numériques complexes.

1. Définition. Opérations sur l'ensemble des suites complexes. Suites réelles associées. Suites bornées.

   Convergence d'une suite numérique complexe. Caractérisation : $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si, et seulement si $(\mathrm{Re}(u_n))_{n\geqslant 0}$ converge vers $\mathrm{Re}(\ell)$ et $(\mathrm{Im}(u_n))_{n\geqslant 0}$ vers $\mathrm{Im}(\ell)$.
   La suite en modules d'une suite complexe convergente est convergente.
   Théorèmes d'opérations sur les limites de suites convergentes.
   Théorèmes de majoration.

2. Suites particulières :

   Suites constantes, stationnaires. Convergence.

   Suites arithmétiques. Somme de n termes consécutifs.

   Suites géométriques, cas de convergence. Cas de $(e^{i\alpha n})_{n\geqslant 0}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Somme de n termes consécutifs.

   Suites arithmético-géométriques.

   Suites récurrentes linéaires d'ordre deux : expression du terme général à l'aide des solutions de l'équation caractéristique dans le cas complexe et dans le cas réel.

Matrices

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles.
n et p désignent des entiers naturels non nuls.

1. Définition générale d'une matrice de type (n,p) à coefficients dans $\mathbb{K}$. Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Somme de matrices, produit externe d'un scalaire et d'une matrice, produit de deux matrices.

   Propriétés des opérations. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension np.

   Matrice nulle, matrice colonne, ligne, élément, carrée.

   Transposée d'une matrice de type (n,p). Propriétés.

2. Matrices carrées. Ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Eléments diagonaux. Matrice identité d'ordre n notée I_n.

   Définition d'une matrice inversible, de son inverse. Propriétés des matrices inversibles. L'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$ et appelé groupe linéaire d'ordre n.
   Caractérisation de $GL_2(\mathbb{K})$ à l'aide du déterminant. Inverse d'une matrice de $GL_2(\mathbb{K})$.

   Puissances d'une matrice. Formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent.
   Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, notée A^{-k}, pour tout k dans $\mathbb{N}^*$.

3. Définition et propriétés des matrices carrées particulières : diagonales, triangulaires (supérieures et inférieures), symétriques, antisymétriques.
   Condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale ou triangulaire soit inversible et propriétés de l'inverse le cas échéant.

4. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. Matrice échelonnée par lignes.

   Algorithme du pivot de Gauss.

   Application au calcul de l'inverse d'une matrice carrée A par opérations élémentaires sur les lignes de la matrice par blocs $M = (A|I_n)$.