PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n°17 : du 2 au 8 février 2026

Systèmes linéaires.
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni des opérations usuelles.
n et p désignent des entiers naturels non nuls.

Il est coseillé de résoudre les systèmes directement, plutôt que d'opérer sur des matrices.

1. Equation linéaire, système linéaire (S) de n équations à p inconnues réelles ou complexes.
   Solution d'un système linéaire. Ensemble des solutions. Système compatible, incompatible, homogène.
   Ecriture matricielle $AX = B$, matrice associée A, des seconds membres B, des inconnues X.

   (S) est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des matrices colonnes de A.
   Système homogène associé (S_0), toujours compatible.
2. Théorème de structure. Si (S) est compatible, ses solutions s'obtiennent comme la somme d'une solution particulière de (S) et des solutions de (S_0).

   Deux systèmes linéaires sont équivalents si on peut passer de l'un à l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires. Ils ont alors le même ensemble de solutions.

   Un système linéaire est équivalent à un système dont la matrice associée est échelonnée par lignes.
   Pivots. Equations principales. Conditions de compatibilité. Inconnues principales et secondaires (ou paramètres).
3. Résolution pratique avec l'algorithme du pivot de Gauss.
   Un système linéaire admet soit une infinité de solutions, soit une seule, soit aucune solution.
4. Définition et propriétés des systèmes de Cramer.
5. Calcul de l'inverse d'une matrice carrée avec la résolution d'un système dont le second membre est constitué de paramètres.

Fonctions numériques réelles

NB : Dans le cours, un intervalle de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

1. Révisions à faire : applications paires et impaires, périodiques, monotones, fonctions usuelles.
2. Pour une partie D non vide de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application,
   si f est strictement croissante sur D, alors $\forall (x, y) \in D^2$, $x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$;
   si f est monotone et injective, alors f est strictement monotone ;
   si f est strictement monotone, alors f est injective ;
   si f est strictement monotone, f définit une bijection dont la réciproque est strictement monotone de même monotonie que f.
3. Pour D partie non vide de $\mathbb{R}$, rappel des définitions des opérations sur $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.

   Application majorée (respectivement minorée) et borne supérieure (respectivement inférieure) d'une application majorée (respectivement minorée). Application bornée.

   Maximum et minimum, maximum local et minimum local d'une application.Définition de $f \leqslant g$, $f < g$, $f \geqslant 0$, $|f|$, $\sup(f, g)$ ou $\max(f, g)$, $\inf(f, g)$ ou $\min(f, g)$ pour f et g dans $\mathcal{F}(D, \mathbb{R})$.
4. Limite finie, infinie, d'une application en un réel ou à l'infini. Unicité.

   Caractérisation séquentielle de la limite.

   Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, inverse. Composition.

   Si f a une limite finie ℓ en $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, alors f est bornée au voisinage de x_0 ; $|f|$ a pour limite $|\ell|$ en x_0.
   Si $\ell > 0$ alors $f(x) > 0$ pour x au voisinage de x_0.

   Limite à droite et à gauche, par valeurs supérieures et inférieures.
5. Théorèmes de comparaison et d'encadrement et de majoration. Théorème de la limite monotone.
6. Limites à connaître : $\dfrac{\sin(x)}{x}$, $\dfrac{\tan(x)}{x}$, $\dfrac{\ln(1+x)}{x}$, $\dfrac{e^x - 1}{x}$, $\dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x}$ quand x tend vers 0.

   Théorèmes de croissances comparées : pour a, b et λ dans $\mathbb{R}_+^*$,

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln(x))^a}{x^b} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} (|\ln(x)|)^a x^b = 0^+ \ ; \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^{\lambda x}} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} |x|^b e^{\lambda x} = 0^+.$$