

Fonctions numériques réelles

NB : Dans le cours, un intervalle de \mathbb{R} non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

- Continuité d'une application en un point d'un intervalle non trivial de \mathbb{R} .

Prolongement par continuité. Continuité à droite et à gauche. Propriétés.

- Rappels : Continuité sur un intervalle non trivial I de \mathbb{R} .

Opérations et composition.

Théorème des valeurs intermédiaires.

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Théorème de la bijection : si une fonction réelle f est continue et strictement monotone sur un intervalle I non vide et non réduit à un point, alors $f(I)$ est un intervalle et f réalise une bijection de I dans $f(I)$, dont la réciproque est continue et strictement monotone sur $f(I)$, de même monotonie que f .

Compléments : Continuité à droite et à gauche sur I .

L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

- Relations de domination, de prépondérance et d'équivalence au voisinage d'un point ou de l'infini : définitions, propriétés et opérations.

Négligeabilités usuelles au voisinage de $+\infty$ à partir des théorèmes de croissances comparées.

Équivalents à connaître : fonctions polynômes en 0 et à l'infini ;

$$\begin{array}{llll} \sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \text{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \text{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \sqrt[n]{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{n}, \text{ pour } n \geq 2 \text{ dans } \mathbb{N} \\ \cos(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}; & \text{ch}(x) - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}; & \ln(x) \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1. & \text{ch}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}; \quad \text{sh}(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}. \end{array}$$

Fonctions dérivables.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial de \mathbb{R} et x_0 un élément de I .

- Définition de la dérivabilité (- à droite, - à gauche) d'une fonction en un réel. Interprétation graphique.
 f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe des réels a et b et une application φ de I dans \mathbb{R} tels que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in I, f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Dans ce cas $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.

Conséquence : Une application dérivable en un réel est continue en ce réel.

- Opérations sur les dérivées. Composition d'applications dérivables et valeur de la dérivée.

Lien entre extremum local et dérivée : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur x_0 de l'intervalle I et si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.

- Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée. Propriétés.

Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.

- Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes.

Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'ensemble \bar{I} de ses points intérieurs.

- Théorème de la limite de la dérivée : Si f est continue sur l'intervalle I , et si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ alors i) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.

ii) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ respectivement, et la courbe de f a une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .

Corollaire : Si f est continue sur l'intervalle I , si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$,

alors f est dérivable en x_0 , $f'(x_0) = \ell$ et f est de classe C^1 sur I .

- Dérivées d'ordres supérieurs. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, applications de classe C^n .

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, opérations, formule de Leibniz, composition, théorème de la bijection pour les fonctions n fois dérivables, de classe C^n, C^∞ .

- Fonctions convexes, définition et interprétation géométrique.

Caractérisations lorsque la fonction est dérivable, deux fois dérivable et interprétation géométrique.

Fonctions concaves.

Point d'inflexion et lien avec la dérivée seconde.