

## Fonctions numériques réelles

NB : Dans le cours, un intervalle de  $\mathbb{R}$  non vide et non réduit à un point est appelé un intervalle non trivial.

1. Continuité d'une application en un point d'un intervalle non trivial de  $\mathbb{R}$ .

Prolongement par continuité. Continuité à droite et à gauche. Propriétés.

2. Rappels : Continuité sur un intervalle non trivial  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

Opérations et composition.

Théorème des valeurs intermédiaires.

L'image d'un intervalle par une application continue est un intervalle.

Théorème de la bijection : si une fonction réelle  $f$  est continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  non vide et non réduit à un point, alors  $f(I)$  est un intervalle et  $f$  réalise une bijection de  $I$  dans  $f(I)$ , dont la réciproque est continue et strictement monotone sur  $f(I)$ , de même monotonie que  $f$ .

Compléments : Continuité à droite et à gauche sur  $I$ .

L'image d'un segment par une application continue est un segment.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

3. Relations de domination, de prépondérance et d'équivalence au voisinage d'un point ou de l'infini : définitions, propriétés et opérations.

Négligeabilités usuelles au voisinage de  $+\infty$  à partir des théorèmes de croissances comparées.

Equivalents à connaître : fonctions polynômes en 0 et à l'infini ;

$$\begin{aligned} \sin(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \tan(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \operatorname{Arcsin}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \operatorname{Arctan}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \\ \ln(1+x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & e^x - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} x; & \sqrt[n]{1+x} - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{n}, \text{ pour } n \geq 2 \text{ dans } \mathbb{N} \\ \cos(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}; & \operatorname{ch}(x) - 1 &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}; & \ln(x) &\underset{x \rightarrow 1}{\sim} x - 1. & \operatorname{ch}(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}; & \operatorname{sh}(x) &\underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{e^x}{2}. \end{aligned}$$

## Fonctions dérivables.

Dans ce qui suit,  $f$  désigne une fonction réelle définie sur un intervalle  $I$  non trivial de  $\mathbb{R}$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

1. Définition de la dérivabilité ( - à droite, - à gauche) d'une fonction en un réel. Interprétation graphique.

$f$  est dérivable en  $x_0$  si et seulement si il existe des réels  $a$  et  $b$  et une application  $\varphi$  de  $I$  dans  $\mathbb{R}$  tels que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$  et  $\forall x \in I, f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ . Dans ce cas  $a = f(x_0)$  et  $b = f'(x_0)$ .

Conséquence : Une application dérivable en un réel est continue en ce réel.

2. Opérations sur les dérivées. Composition d'applications dérivables et valeur de la dérivée.

Lien entre extremum local et dérivée : si  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en un point intérieur  $x_0$  de l'intervalle  $I$  et si  $f$  admet un extremum local en  $x_0$ , alors  $f'(x_0) = 0$ .

3. Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée. Propriétés.

Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.

4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis.

Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes.

Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle  $I$  et dérivable sur l'ensemble  $\overset{\circ}{I}$  de ses points intérieurs.

5. Théorème de la limite de la dérivée : Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , et si  $f$  est dérivable sur  $I \setminus \{x_0\}$  alors  
i) si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ,  $f$  est dérivable en  $x_0$  et  $f'(x_0) = \ell$ .

ii) si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$  vaut  $+\infty$  ou  $-\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  vaut  $+\infty$  ou  $-\infty$  respectivement, et la courbe de  $f$  a une tangente verticale au point d'abscisse  $x_0$ .

Corollaire : Si  $f$  est continue sur l'intervalle  $I$ , si  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I \setminus \{x_0\}$  et si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$ ,

alors  $f$  est dérivable en  $x_0$ ,  $f'(x_0) = \ell$  et  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $I$ .

6. Dérivées d'ordres supérieurs. Pour  $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , applications de classe  $C^n$ .

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , opérations, formule de Leibniz, composition, théorème de la bijection pour les fonctions  $n$  fois dérivables, de classe  $C^n$ ,  $C^\infty$ .

7. Fonctions convexes, définition et interprétation géométrique.

Caractérisations lorsque la fonction est dérivable, deux fois dérivable et interprétation géométrique.

Fonctions concaves.

Point d'inflexion et lien avec la dérivée seconde.