

Fonctions dérivables.

Dans ce qui suit, f désigne une fonction réelle définie sur un intervalle I non trivial de $\mathbb{R}$ et x_0 un élément de I .

1. Définition de la dérivabilité (- à droite, - à gauche) d'une fonction en un réel. Interprétation graphique.
 f est dérivable en x_0 si et seulement si il existe des réels a et b et une application φ de I dans $\mathbb{R}$ tels que $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ et $\forall x \in I, f(x) = a + b(x - x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$. Dans ce cas $a = f(x_0)$ et $b = f'(x_0)$.
 Conséquence : Une application dérivable en un réel est continue en ce réel.
2. Opérations sur les dérivées. Composition d'applications dérivables et valeur de la dérivée.
 Lien entre extremum local et dérivée : si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en un point intérieur x_0 de l'intervalle I et si f admet un extremum local en x_0 , alors $f'(x_0) = 0$.
3. Fonction dérivable sur un intervalle, fonction dérivée. Propriétés.
 Théorème de la bijection pour les fonctions dérivables.
4. Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finis.
 Inégalité des accroissements finis et fonctions lipschitziennes.
 Lien entre la monotonie et le signe de la dérivée d'une fonction continue sur un intervalle I et dérivable sur l'ensemble $\overset{\circ}{I}$ de ses points intérieurs.
5. Théorème de la limite de la dérivée : Si f est continue sur l'intervalle I , et si f est dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$ alors
 i) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \ell$.
 ii) si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ vaut $+\infty$ ou $-\infty$ respectivement, et la courbe de f a une tangente verticale au point d'abscisse x_0 .
 Corollaire : Si f est continue sur l'intervalle I , si f est de classe C^1 sur $I \setminus \{x_0\}$ et si $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en x_0 , $f'(x_0) = \ell$ et f est de classe C^1 sur I .
6. Dérivées d'ordres supérieurs. Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, applications de classe C^n .
 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, opérations, formule de Leibniz, composition, théorème de la bijection pour les fonctions n fois dérivables, de classe C^n , C^∞ .
7. Fonctions convexes, définition et interprétation géométrique.
 Caractérisations lorsque la fonction est dérivable, deux fois dérivable et interprétation géométrique.
 Fonctions concaves.
 Point d'inflexion et lien avec la dérivée seconde.

Développements limités.

1. Définition de développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour n quelconque dans $\mathbb{N}$.
 Unicité, troncature. Lien avec l'équivalence.
 Une fonction qui a un développement limité en un réel est prolongeable par continuité ou est continue en ce réel.
 Une fonction a un développement limité à l'ordre 1 en un réel si, et seulement si elle est dérivable en ce réel (après prolongement par continuité si nécessaire).
2. Formule de Taylor-Young
3. f a un développement limité à l'ordre n en x_0 si, et seulement si, $g : t \mapsto f(x_0 + t)$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Lien entre les deux développements limités. Forme normalisée d'un développement limité.
4. Somme et produit de développements limités.
5. Opérations sur les développements limités, composition.
 En 0, développement limité de $x \mapsto f(-x)$ et lien des développements limités avec la parité des fonctions.
Attention : la division selon les puissances croissantes est hors programme.
6. Intégration et dérivation de développements limités en x_0 .
7. Exemples de développement limité à gauche et à droite, d'un quotient de dénominateur de limite nulle, d'une fonction réciproque.
8. Développement asymptotique d'une fonction non bornée au voisinage d'un réel x_0 (uniquement avec des puissances entières de $x - x_0$).
9. Application des développements limités à la détermination de la tangente et de la position de la courbe par rapport à la tangente en un point.
10. Asymptote verticale.
 Asymptote horizontale, oblique. Position de la courbe par rapport à cette asymptote à l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de l'infini.
 Notion de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ou des ordonnées (hors programme de PCSI).

Développements limités à connaître :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Développements limités à savoir retrouver rapidement :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad (\alpha = 1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \quad (\alpha = -1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$