

Développements limités.

- Définition de développement limité à l'ordre n en $x_0 \in \mathbb{R}$ pour n quelconque dans \mathbb{N} .
Unicité, troncature. Lien avec l'équivalence.
Une fonction qui a un développement limité en un réel est prolongeable par continuité ou est continue en ce réel.
Une fonction a un développement limité à l'ordre 1 en un réel si, et seulement si elle est dérivable en ce réel (après prolongement par continuité si nécessaire).
- Formule de Taylor-Young
- f a un développement limité à l'ordre n en x_0 si, et seulement si, $g : t \mapsto f(x_0 + t)$ a un développement limité à l'ordre n en 0. Lien entre les deux développements limités. Forme normalisée d'un développement limité.
- Somme et produit de développements limités.
- Opérations sur les développements limités, composition.
En 0, développement limité de $x \mapsto f(-x)$ et lien des développements limités avec la parité des fonctions.
Attention : la division selon les puissances croissantes est hors programme.
- Intégration et dérivation de développements limités en x_0 .
- Exemples de développement limité à gauche et à droite, d'un quotient de dénominateur de limite nulle, d'une fonction réciproque.
- Développement asymptotique d'une fonction non bornée au voisinage d'un réel x_0 (uniquement avec des puissances entières de $x - x_0$).
- Application des développements limités à la détermination de la tangente et de la position de la courbe par rapport à la tangente en un point.
- Asymptote verticale.
Asymptote horizontale, oblique. Position de la courbe par rapport à cette asymptote à l'aide d'un développement asymptotique au voisinage de l'infini.
Notion de branche parabolique de direction l'axe des abscisses ou des ordonnées (hors programme de PCSI).

Polynômes.

\mathbb{K} désigne l'un des ensembles \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

- Définition des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} sous la forme $\sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $n \in \mathbb{N}$, a_0, \dots, a_n dans \mathbb{K} . ou sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ avec a_k nul pour k assez grand.
 X est l'indéterminée des polynômes.
Définition de monôme.
Notation $\mathbb{K}[X]$ de l'ensemble des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} .
Egalité de deux polynômes. Polynôme nul. Fonction polynomiale associée à un polynôme.
- Degré d'un polynôme, coefficient dominant, coefficient constant. Polynôme unitaire ou normalisé.
Le polynôme nul a pour degré $-\infty$.
Un polynôme constant P de valeur a est noté $P = aX^0$ ou $P = a$. Son degré est 0 s'il est non nul.
Pour n dans \mathbb{N} , définition de $\mathbb{K}_n[X]$.
- Opérations sur $\mathbb{K}[X]$: somme et produit de deux polynômes, produit d'un scalaire et d'un polynôme.
Degré des polynômes obtenus.
Les polynômes inversibles sont les polynômes de degré 0.
Tout polynôme non nul de $\mathbb{K}[X]$ est régulier pour le produit.
Puissances de polynômes. Propriétés dont la formule du binôme de Newton dans $\mathbb{K}[X]$ et la factorisation de $A^n - B^n$ par $A - B$ pour $n \geq 2$ dans \mathbb{N} . Cas de $X^n - 1$.
Polynômes composés.
Lien avec les fonctions polynômes.
- Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Multiple d'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. Propriétés de la division des polynômes.
Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$. Division suivant les puissances décroissantes pour trouver le quotient et le reste de la division euclidienne.
- Polynôme dérivé, polynôme dérivé d'ordre k d'un polynôme P , pour $k \in \mathbb{N}^*$.
Notation $P^{(k)}$, convention $P^{(0)} = P$.
Propriétés de la dérivation dont la formule de Leibniz pour les polynômes.
Polynômes dérivés de X^n et de $(X - a)^n$ pour a dans \mathbb{K} et n dans \mathbb{N}^* .
Formules de Taylor pour les polynômes.

6. Racine x_0 d'un polynôme. Caractérisation avec la divisibilité par $X - x_0$.
 Tout polynôme non nul de degré n admet au plus n racines distinctes. Multiplicité d'une racine. Détermination de la multiplicité à l'aide de divisions euclidiennes ou des polynômes dérivés.
7. Polynôme scindé sur \mathbb{K} . Expressions de la somme et du produit des racines d'un polynôme scindé en fonction de ses coefficients. Relations dans le cas d'un polynôme de degré 2. Cas des polynômes du second degré.

Développements limités à connaître :

$$\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$$

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Pour $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$,

$$(1+x)^\alpha \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n)$$

$$\operatorname{ch}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\operatorname{sh}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

$$\operatorname{Arctan}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

Développements limités à savoir retrouver rapidement :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3) \quad (\alpha = 1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + o(x^3) \quad (\alpha = -1/2 \text{ dans } (1+x)^\alpha)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + o(x^5)$$

$$\operatorname{Arcsin}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$

$$\operatorname{Arccos}(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} \frac{\pi}{2} - x - \frac{x^3}{6} - \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$