PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 23 : du 30 mars au 5 avril 2026

Polynômes.

$\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Tout le chapitre, dont :

1. Polynôme irréductible dans $\mathbb{K}[X]$. Théorème de d'Alembert-Gauss (admis).
   Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
   Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.
   Décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ des polynômes $X^n - 1$ et $\sum_{k=0}^{n-1} X^k$ pour $n \geqslant 2$ dans $\mathbb{N}$.
2. Fonction rationnelle, définition de zéros et pôles.
   Décomposition en éléments simples des fonctions rationnelles à pôles simples.
   N.B. : Selon le programme, dans le cas où le dénominateur possède une racine multiple ou un facteur irréductible de degré 2, la forme cherchée doit être fournie.

Espaces vectoriels.

1. Définitions et premières propriétés d'un espace vectoriel $(E, +, .)$ sur $\mathbb{K}$. Espaces vectoriels de référence.
   Espace vectoriel produit.
   $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E, où X est un ensemble non vide,.
2. Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(E, +, .)$, définition, caractérisation et propriétés.
3. Si S est une famille finie de vecteurs de E, l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S est noté $\mathrm{Vect}(S)$.
   C'est un sous-espace vectoriel de E, le plus petit contenant tous les vecteurs de S, au sens de l'inclusion.
   Exemple de la droite vectorielle $\mathbb{K}\vec{a} = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ pour $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans E : $\mathbb{K}\vec{a} = \mathrm{Vect}(\vec{a})$.
4. Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E. Somme directe de sous-espaces vectoriels.
   Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, caractérisation.
5. Sous et sur-familles d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
   Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Propriétés.
   Famille finie libre, liée. Propriétés.
6. Définition d'une base d'un sous-espace vectoriel F de E comme famille finie libre et génératrice de F.
   Caractérisation : une famille finie S de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de E est une base de F si et seulement si chaque vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de S.
   Coordonnées d'un vecteur dans une base.