

ATTENTION : La matrice d'un vecteur n'a pas encore été définie, en tenir compte pour le calcul du rang d'une famille finie de vecteurs.

Espaces vectoriels.

- Définitions et premières propriétés d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ sur \mathbb{K} . Espaces vectoriels de référence.
Espace vectoriel produit.
 \mathbb{K} -espace vectoriel $\mathcal{F}(X, E)$ des applications de X dans E , où X est un ensemble non vide.
- Sous-espace vectoriel d'un \mathbb{K} -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$, définition, caractérisation et propriétés.
- Si S est une famille finie de vecteurs de E , l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de S est noté $\text{Vect}(S)$.
C'est un sous-espace vectoriel de E , le plus petit contenant tous les vecteurs de S , au sens de l'inclusion.
Exemple de la droite vectorielle $\mathbb{K}\vec{a} = \{\lambda\vec{a} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ pour $\vec{a} \neq \vec{0}$ dans E : $\mathbb{K}\vec{a} = \text{Vect}(\vec{a})$.
- Somme $F + G$ de deux sous-espaces vectoriels F et G de E . Somme directe de sous-espaces vectoriels.
Sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E , caractérisation.
- Sous et sur-familles d'une famille finie de vecteurs d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E .
Famille génératrice finie d'un sous-espace vectoriel. Propriétés.
Famille finie libre, liée. Propriétés.
- Définition d'une base d'un sous-espace vectoriel F de E comme famille finie libre et génératrice de F .
Caractérisation : une famille finie S de vecteurs d'un sous-espace vectoriel F de E est une base de F si et seulement si chaque vecteur de F s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de S .
Coordonnées d'un vecteur dans une base.

Espaces vectoriels de dimension finie.

- Un \mathbb{K} -espace vectoriel E est de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.
Théorème de la base extraite.
Si E est non nul et de dimension finie, E admet au moins une base et toutes ses bases ont le même nombre de vecteurs. Dimension. Par convention $\dim(\{\vec{0}\}) = 0$. Caractérisation des bases en dimension finie.
- Dimension et base d'un espace vectoriel produit de deux espaces vectoriels de dimension finie non nulle.
Base canonique et dimensions des espaces vectoriels usuels. Cas de \mathbb{C} .
- Le rang d'une famille finie S de vecteurs d'un espace vectoriel quelconque est la dimension de $\text{Vect}(S)$.
Propriétés.
 S est libre si et seulement si $\text{rg}(S)$ correspond au nombre de vecteurs de S .
- Tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie inférieure ou égale à n .
 $\dim(F) = n$ si, et seulement si $F = E$.
Définition de droite, plan, hyperplan.
Théorème de la base incomplète.
- Si $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k, \vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E alors $\text{Vect}(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_k) \oplus \text{Vect}(\vec{e}_{k+1}, \dots, \vec{e}_n) = E$.
Tout sous-espace vectoriel de E a un supplémentaire dans E .
Pour deux sous-espaces vectoriels F et G supplémentaires dans E , $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.
Caractérisation des supplémentaires à l'aide de la dimension.
Base de E adaptée à $F \oplus G$ (dans cet ordre) pour deux sous-espaces vectoriels supplémentaires non nuls de E .
- Dimension de la somme de deux sous-espaces vectoriels de dimension finie : formule de Grassmann.