PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 26 : du 4 au 10 mai 2026

Intégrale d'une fonction continue.

1. Subdivision d'un segment, fonction en escalier et intégrale d'une fonction en escalier sur un segment de $\mathbb{R}$.
   Propriétés de l'intégrale : linéarité, positivité, croissance, la valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue.
2. Intégrale d'une fonction continue sur un segment.
   Définition de la valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
   Linéarité, positivité, croissance. La valeur absolue de l'intégrale est majorée par l'intégrale de la valeur absolue.
   Relation de Chasles. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Pour a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$, f une fonction continue et positive sur le segment $[a, b]$, si $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$, alors f est nulle sur $[a, b]$. Corollaires.
4. Somme de Riemann pour une subdivision régulière.
   Dans le cas d'une fonction continue, convergence vers l'intégrale quand le pas tend vers 0.
5. Rappels : Pour une fonction f continue sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, pour a dans I, $F_a : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est définie, continue et dérivable sur I et $F_a' = f$ sur I. C'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.
   Les primitives de f sont égales entre elles à une constante additive près. Primitives des fonctions usuelles.
   Calcul d'intégrales à l'aide de primitives, intégration par parties. Intégration d'un développement limité.
6. Changement de variable.
7. Formule de Taylor avec reste intégral. Inégalité de Taylor-Lagrange.
8. Intégrale d'une fonction continue à valeurs complexes, propriétés.
9. Valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles, des trapèzes.
   Domination de l'erreur dans le cas de fonctions de classe C^1 et C^2 respectivement.

Applications linéaires.

On note $(E, +, .)$ et $(F, +, .)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définition et caractérisation d'une application linéaire de E dans F.
   Si f est une application linéaire de E dans F, $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et pour tout $\vec{x}$ dans E, $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.
   Définition d'isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.
   On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, ou $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ si nécessaire,
   $L(E)$ celui des endomorphismes de E et $GL(E)$ (groupe linéaire) celui des automorphismes de E dans F.
2. Noyau et image : définitions et propriétés.
3. Image et image réciproque de sous-espaces vectoriels par une application linéaire.
   $L(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Composée d'applications linéaires. La composition est interne dans $L(E)$.
   La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Espaces vectoriels isomorphes.
   Composition d'isomorphismes. Propriétés de $GL(E)$.
4. Homothéties, projections (ou projecteurs) et symétries vectorielles : définitions et propriétés générales.