

Applications linéaires.

On note $(E, +, \cdot)$ et $(F, +, \cdot)$ deux \mathbb{K} -espaces vectoriels où \mathbb{K} désigne \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

1. Définition et caractérisation d'une application linéaire de E dans F .

Si f est une application linéaire de E dans F , $f(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$ et pour tout \vec{x} dans E , $f(-\vec{x}) = -f(\vec{x})$.

Définition d'isomorphisme, endomorphisme, automorphisme, forme linéaire.

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F , ou $L_{\mathbb{K}}(E, F)$ si nécessaire,

$L(E)$ celui des endomorphismes de E et $GL(E)$ (groupe linéaire) celui des automorphismes de E dans F .

2. Noyau et image : définitions et propriétés.

3. Image et image réciproque de sous-espaces vectoriels par une application linéaire.

$L(E, F)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel. Composée d'applications linéaires. La composition est interne dans $L(E, F)$.

La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Espaces vectoriels isomorphes.

Composition d'isomorphismes. Propriétés de $GL(E)$.

4. Homothéties, projections (ou projecteurs) et symétries vectorielles : définitions et propriétés générales.

Dans la suite, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, et $u \in L(E, F)$.

5. i) $u(B) = (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \dots, u(\vec{e}_n))$ engendre $\text{Im}(u)$.

ii) u est surjective si et seulement si $u(B)$ engendre F .

iii) u est injective si et seulement si $u(B)$ est une famille libre de F .

iii) u est bijective si et seulement si $u(B)$ est une base de F .

Conséquences sur la comparaison des dimensions.

Si u est un isomorphisme de E dans F , alors F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E) = n$.

L'application $\mathbb{K}^n \rightarrow F; (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^n x_k \vec{e}_k$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.

6. En dimension finie, deux \mathbb{K} -espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si $\dim(E) = \dim(F)$.

Caractérisation : si E et F sont de dimension finie non nulle et si $\dim(E) = \dim(F)$, alors pour tout $u \in L(E, F)$, u est un isomorphisme si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.

7. Matrice dans B d'un vecteur et d'une famille finie S de vecteurs de E .

Calcul du rang de S à l'aide de sa matrice dans B .

8. Rang d'une application linéaire, définitions et propriétés.

Théorème du rang quand E et F sont de dimension finie.

Cas des formes linéaires.

9. Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base de E .

L'application $L(E, F) \rightarrow F^n; f \mapsto (f(\vec{e}_1), \dots, f(\vec{e}_n))$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.

10. Supplémentaires d'un hyperplan de E . Lien entre formes linéaires non nulles et hyperplans.

Equation d'un hyperplan dans une base.

11. $u \in L(E, F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Cette propriété reste vraie quand E est de dimension infinie.

Forme géométrique du théorème du rang.

Exemple des projections et symétries vectorielles.