PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 28 : du 25 au 31 mai 2026

Applications linéaires.

On note $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Dans la suite, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$, et $u \in L(E,F)$.

1. i) $u(B) = (u(\vec{e}_1), u(\vec{e}_2), \cdots, u(\vec{e}_n))$ engendre $\mathrm{Im}(u)$.
   ii) u est surjective si et seulement si $u(B)$ engendre F.
   iii) u est injective si et seulement si $u(B)$ est une famille libre de F.
   iii) u est bijective si et seulement si $u(B)$ est une base de F.
   Conséquences sur la comparaison des dimensions.
   Si u est un isomorphisme de E dans F, alors F est de dimension finie et $dim(F) = dim(E) = n$.
   L'application $\mathbb{K}^n \to E\,;\ (x_1, \cdots, x_n) \mapsto \sum_{k=1}^{n} x_k \vec{e}_k$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.
2. En dimension finie, deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F sont isomorphes si et seulement si $dim(E) = dim(F)$.
   Caractérisation : si E et F sont de dimension finie non nulle et si $dim(E) = dim(F)$, alors pour tout $u \in L(E,F)$, u est un isomorphisme si et seulement si u est injective, si et seulement si u est surjective.
3. Matrice dans B d'un vecteur et d'une famille finie S de vecteurs de E.
   Calcul du rang de S à l'aide de sa matrice dans B.
4. Rang d'une application linéaire, définitions et propriétés.
   Théorème du rang quand E et F sont de dimension finie.
   Cas des formes linéaires.
5. Une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par l'image d'une base de E.
   L'application $L(E,F) \to F^n\,;\ f \mapsto \big(f(\vec{e}_1), \cdots, f(\vec{e}_n)\big)$ est un isomorphisme, dépendant de la base B choisie.
6. Supplémentaires d'un hyperplan de E. Lien entre formes linéaires non nulles et hyperplans.
   Equation d'un hyperplan dans une base.
7. $u \in L(E,F)$ est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E.
   Cette propriété reste vraie quand E est de dimension infinie.
   Exemple des projections et symétries vectorielles.
   Forme géométrique du théorème du rang : pour $u \in L(E,F)$, si S est un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$, alors $g : S \to \mathrm{Im}(u)\,;\ \vec{x} \mapsto u(\vec{x})$ est un isomorphisme.
8. Equations linéaires en dimension non nulle quelconque.
9. Matrice d'une application linéaire, coordonnées de l'image d'un vecteur.
   Propriétés des matrices d'applications linéaires. Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
   Cas des isomorphismes.
10. Matrice d'un endomorphisme, d'un automorphisme. Cas des homothéties.
    Matrice dans une base adaptée d'une projection, d'une symétrie.
11. Définition et propriétés du rang d'une matrice.
12. Changement de base.