PCSI 25/26 - Programme de colle de Mathématiques n° 30 : du 8 au 14 juin 2026

Le programme est le même que le précédent :

Applications linéaires.

On note $(E,+,.)$ et $(F,+,.)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Dans la suite, E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, de base $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \cdots, \vec{e}_n)$, et $u \in L(E,F)$.

1. Equations linéaires en dimension non nulle quelconque.
2. Matrice d'une application linéaire, coordonnées de l'image d'un vecteur.
   Propriétés des matrices d'applications linéaires. Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
   Cas des isomorphismes.
3. Matrice d'un endomorphisme, d'un automorphisme. Cas des homothéties.
   Matrice dans une base adaptée d'une projection, d'une symétrie.
4. Définition et propriétés du rang d'une matrice. Invariances et calcul du rang.
5. Caractérisation d'une base B' à l'aide de sa matrice dans une base B, définition et propriétés de la matrice de passage $P_{B,B'}$ de B à B'. Relation de changement de base dans un espace vectoriel.
6. Matrice d'une application linéaire f relative à des bases : notation $Mat_{B',B}(f)$ si B est une base de l'espace de départ et B' une base de l'espace d'arrivée.
   Relation de changement de base pour les applications linéaires. Cas des endomorphismes.

Séries

1. Séries numériques réelles et complexes. Sommes partielles, convergence, somme de la série.
   Séries tronquées. Linéarité.
   Le terme général d'une série convergente tend vers 0. Divergence grossière.
   Lien suite-série : une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1}-u_n)$ converge.

   Une série complexe $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est convergente si et seulement si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} Re(u_n)$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} Im(u_n)$ sont convergentes. Lien entre les sommes.
2. Séries à termes positifs. Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs ($\leqslant$, $\mathcal{O}$, $\sim$).
   Comparaison entre série et intégrale pour une fonction positive continue et monotone. Application à la divergence de la série harmonique.
3. Séries de référence : harmonique, géométriques, de Riemann, exponentielles.