

Généralités. Connaissances de base.

1. Notations des ensembles de nombres. Propriétés des opérations dans $\mathbb{R}$. Identités remarquables.
Rappels sur les inégalités dans $\mathbb{R}$, lien avec les opérations.
Définition et propriétés de la valeur absolue d'un réel.
Différents encadrement obtenus à partir de $|a - b| \leq c$ pour a et b dans $\mathbb{R}$, et c dans $\mathbb{R}_+^*$.
Rappels sur la résolution d'équations et inéquations du second degré dans $\mathbb{R}$. Signe d'un trinôme.
2. Définition d'une assertion ou proposition logique. Valeur de vérité d'une proposition logique.
Définition et propriétés de la négation, la conjonction, la disjonction, l'implication et l'équivalence.
Condition nécessaire et suffisante.
Définition et propriétés des quantificateurs existentiel et universel : propositions du type "Il existe un...",
" Quel que soit...", symboles $\exists, \forall$.
Négation. Existence et unicité : symbole $\exists!$
Dans ces propositions logiques, x est une variable muette.
3. Ensembles. Ecriture en compréhension d'un ensemble.
Définition d'un sous-ensemble (partie) d'un ensemble E , du complémentaire d'une partie d'un ensemble.
Opérations sur les ensembles : réunion et intersection de deux ensembles et d'une famille d'ensembles, différence de deux ensembles, produit d'un nombre fini d'ensembles.
4. Méthodes de démonstration : implication, équivalence. Proposition avec quantificateurs. Principe de récurrence (simple seulement). Analyse-synthèse. Exemples.
5. Ordre dans $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ (la notion générale de relation d'ordre n'est pas au programme de PCSI).
Rappels sur la divisibilité dans $\mathbb{Z}$. Division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Lemme et algorithme d'Euclide.
Nombres premiers. Décomposition en facteurs premiers.
PGCD et PPCM de deux entiers naturels. Entiers premiers entre eux.
NB : le théorème de Gauss n'est pas au programme mais peut être utilisé.
6. Forme irréductible d'un nombre rationnel. Somme et produit de nombres rationnels.
Somme et produit d'un nombre fini de réels : notations. Définition de la factorielle d'un entier naturel.
Linéarité de la somme. Produit de deux produits.
Sommes à connaître, n étant dans $\mathbb{N}^*$: somme des entiers de 1 à n , de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, d'une même constante.
Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$ quand $n \geq 2$, avec a et b dans $\mathbb{R}$. Cas de $a^n - 1$.

Trigonométrie.

1. Congruence dans $\mathbb{R}$: définition et propriétés.
2. Cosinus, sinus et tangente d'un angle orienté, définition et propriétés.
Interprétation à l'aide du cercle trigonométrique et de la droite d'équation $x = 1$.
3. Formules de trigonométrie. Relations dans un triangle rectangle. (Formulaire à la fin.)
Linéarisation de $\sin^p(x) \cos^q(x)$ pour x réel et (p, q) non nul dans $\mathbb{N}^2$.
4. Résolution d'équations et inéquations simples à l'aide du cercle trigonométrique.
5. Propriétés analytiques des fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.
Courbes de ces différentes fonctions avec les tangentes aux points remarquables ainsi que les asymptotes pour la fonction tangente.

FORMULAIRE de TRIGONOMÉTRIE

Relation fondamentale, pour tout réel x : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

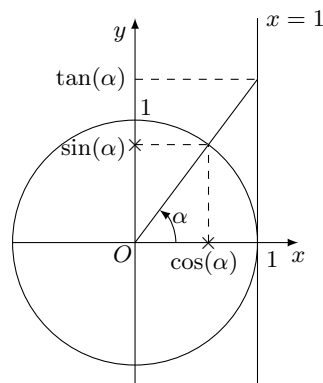
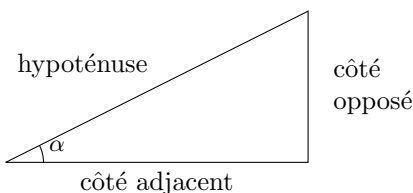
Relations dans un triangle rectangle :

Pour α dans $]0; \pi/2[$,

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{côté adjacent}}$$



Formules d'addition, pour tous a et b dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$$

si a , b et $a+b$ ne sont pas congrus à $\pi/2$ modulo π .

Formules de duplication, pour tout réel a ,

$$\begin{aligned} \cos(2a) &= \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a) \\ \sin(2a) &= 2\sin(a)\cos(a) \end{aligned}$$

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1 - \tan^2(a)}, \quad \text{si } a \text{ n'est congru ni à } \pi/4 \text{ modulo } \pi/2, \text{ ni à } \pi/2 \text{ modulo } \pi$$

Formules de linéarisation, pour tout réel a :

$$\begin{aligned} \cos^2(a) &= \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \sin^2(a) &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} \end{aligned}$$

Transformations de sommes en produits, pour tous réels p et q :

$$\begin{aligned} \cos(p) + \cos(q) &= 2\cos((p+q)/2)\cos((p-q)/2) \\ \cos(p) - \cos(q) &= -2\sin((p+q)/2)\sin((p-q)/2) \\ \sin(p) + \sin(q) &= 2\sin((p+q)/2)\cos((p-q)/2) \\ \sin(p) - \sin(q) &= 2\cos((p+q)/2)\sin((p-q)/2) \end{aligned}$$

Transformations de produits en sommes, pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned} \cos(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b)) \\ \sin(a)\sin(b) &= -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b)) \\ \sin(a)\cos(b) &= \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b)) \end{aligned}$$

Formules de l'arc moitié : pour x réel non congru à π modulo 2π et $t = \tan(x/2)$:

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \\ \sin(x) &= \frac{2t}{1 + t^2} \end{aligned}$$

$$\tan(x) = \frac{2t}{1 - t^2}, \quad \text{si de plus } x \text{ n'est pas congru à } \pi/2 \text{ modulo } \pi$$

Relation entre tangente et cosinus : pour tout réel x non congru à $\pi/2$ modulo π :

$$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

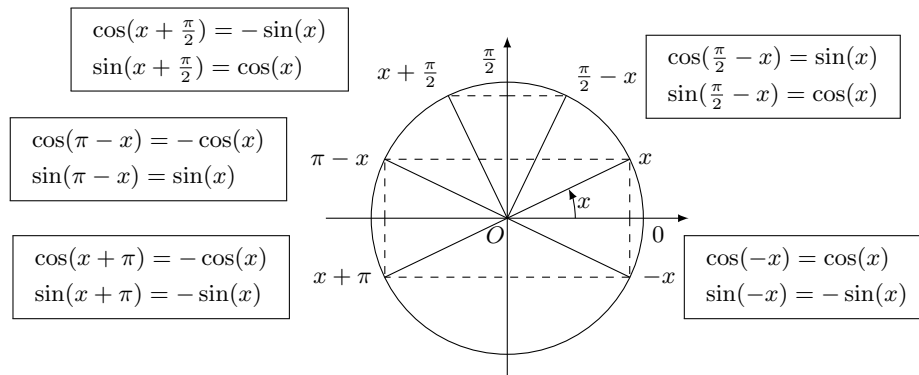
PROPRIÉTÉS DES ANGLES ORIENTÉS

Angles remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	-

Angles associés : pour tout réel x , lorsque les nombres sont définis,

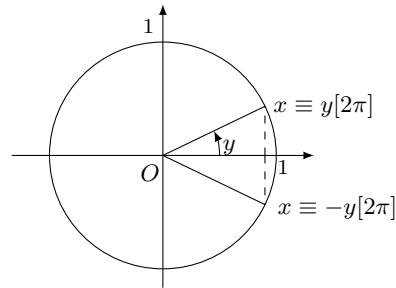
$\sin(-x) = -\sin(x)$	$\cos(-x) = \cos(x)$	$\tan(-x) = -\tan(x)$
$\sin(\pi - x) = \sin(x)$	$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
$\sin(x + \pi) = -\sin(x)$	$\cos(x + \pi) = -\cos(x)$	$\tan(x + \pi) = \tan(x)$
$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$	$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x)$	$\tan(\pi/2 - x) = 1/\tan(x)$
$\sin(x + \pi/2) = \cos(x)$	$\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$	$\tan(x + \pi/2) = -1/\tan(x)$



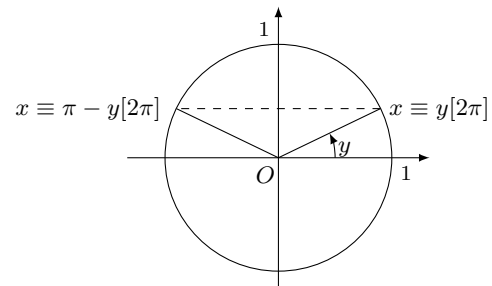
Résolution d'équations trigonométriques :

pour tous réels x et y ,

$$\cos(x) = \cos(y) \iff (x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv -y [2\pi])$$



$$\sin(x) = \sin(y) \iff (x \equiv y [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - y [2\pi])$$



pour tous réels x et y non congrus à $\pi/2$ modulo π :

$$\tan(x) = \tan(y) \iff x \equiv y [\pi]$$

