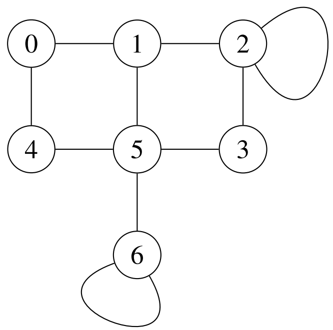
Devoir Maison 3 : ITC

Dénombrement de chemins dans un graphe

On s'intéresse dans ce problème à un graphe non orienté (pouvant contenir des boucles, c'est-à-dire des arêtes d'un sommet vers lui-même), dont on veut dénombrer les chemins en utilisant les puissances de sa matrice d'adjacence. On appliquera ce procédé pour dénombrer certains types d'entiers en les interprétant comme des chemins dans un graphe.

Partie I
Généralités sur les graphes



1. Donner la matrice d'adjacence **`M0`** du graphe non orienté G_0 défini ci-contre, ainsi que sa représentation par une liste de listes d'adjacences **`L0`** comme vous l'écririez en Python.
2. Quel est l'ordre de ce graphe ? Est-il connexe ? Justifier.
3. Écrire une fonction **`Degre(M,s)`** qui prend en argument un graphe représenté par sa matrice d'adjacence **`M`** et un sommet **`s`** et qui renvoie le degré du sommet **`s`**.
4. Écrire une fonction **`Voisins(M,s)`** qui prend en argument un graphe représenté par sa matrice d'adjacence **`M`** et un sommet **`s`** et qui renvoie la liste des numéros des sommets voisins du sommet **`s`**.
5. Écrire une fonction **`NbAretes(M)`** qui prend en argument un graphe représenté par sa matrice d'adjacence **`M`** et renvoie le nombre d'arêtes dans ce graphe.

Partie II
Dénombrement des chemins

6. Expliquer comment savoir s'il existe un chemin de longueur 1 du sommet i au sommet j dans un graphe défini par une matrice d'adjacence **`M`**.
7. On calcule la puissance 3 de la matrice d'adjacence **`M0`** du graphe G_0 et on trouve :

$$M_0^3 = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 6 & 8 & 0 & 2 & 6 \\ 1 & 6 & 0 & \dots & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 8 & 0 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 6 & 1 & 5 & 5 \\ 1 & 6 & 0 & 1 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

   Vérifier pour les coefficients $[M_0^3]_{1,4} = 2$ et $[M_0^3]_{6,6} = 1$ de cette matrice que la valeur à la ligne i et à la colonne j de M_0^3 est égale au nombre de chemins de longueur 3 allant du sommet i au sommet j.
8. On admet le théorème suivant :

   > *Soit G un graphe de matrice d'adjacence M et $k \in \mathbb{N}^*$. La valeur du coefficient (i,j) de la matrice M^k est égal au nombre de chemins de longueur k allant du sommet i au sommet j.*

   En déduire la valeur manquante dans la matrice M_0^3.

Partie III
Puissances de matrice

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors les coefficients de la matrice produit $C = AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ se calculent selon la formule :

$$\forall (i,j) \in [\![0, n-1]\!] \times [\![0, q-1]\!], \quad c_{i,j} = \sum_{k=0}^{p-1} a_{ik} b_{kj},$$

où, comme en Python, on numérote les lignes et les colonnes à partir de 0.

9. En déduire une fonction **`Mult(A,B)`** qui renvoie la matrice produit de **`A`** par **`B`**, notée **`C`** dans ce qui précède. La fonction testera si la taille des matrices permet de calculer le produit à l'aide d'un **`assert`**.
10. Quelle est la complexité de cette fonction, en fonction de n, p et q ?
11. Écrire une fonction **`Id(n)`** qui renvoie la matrice identité de taille n.
12. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déduire de ce qui précède une fonction **`MatrixPower(A,k)`** qui renvoie la matrice A^k pour **`A`** une matrice carrée. (Attention $A^0 = I_n$)
13. Déterminer la complexité de la fonction **`MatrixPower`**, en fonction de k et de n le nombre de lignes (et de colonnes) de **`A`**.

14. On peut améliorer le calcul de la puissance d'une matrice à l'aide de l'exponentiation rapide qui est fondée sur l'identité :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad M^k = \begin{cases} \left(M^{\frac{k}{2}}\right)^2 & \text{si } k \text{ est pair} \\ \left(M^{\frac{k-1}{2}}\right)^2 \times M & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \qquad \text{et} \quad M^0 = I_n$$

Écrire une fonction récursive **`QuickMatrixPower(A,k)`** qui calcule et renvoie A^k selon ce principe.

15. Déterminer la complexité de cette fonction.

16. Une matrice A de taille $n \times n$ est nilpotente s'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$, et dans ce cas son indice de nilpotence est le plus petit tel k, qui vérifie alors $k \leq n$.

    Écrire une fonction **`IndiceNilpotence(A)`** prenant en argument une matrice carrée A, et renvoyant son indice de nilpotence, ou **`None`** si A n'est pas nilpotente. On cherchera à avoir la meilleure complexité possible (en fonction de n), que l'on précisera.

Partie IV
Nombres élégants

On dit qu'un nombre écrit en base p (donc avec des chiffres de 0 à $p-1$) sur k chiffres est élégant si l'écart entre chaque chiffres consécutifs est d'au plus 1. Formellement, pour

$$n = \sum_{i=0}^{k-1} c_i p^i$$

n écrit en base p sur k chiffres est élégant si $\forall i \in [\![0, k-2]\!]$, $|c_{i+1} - c_i| \leq 1$.
On s'intéresse dans la suite au nombre de nombres élégants en base p sur k chiffres.

17. les écritures en base 5 123323434 et 0012243 sont-elles élégantes ?

18. Écrire une fonction **`Ecriture(n,p,k)`** prenant en argument un entier naturel **`n`**, un entier **`p`** supérieur ou égal à 2 et un entier naturel **`k`**, et renvoyant l'écriture de **`n`** en base **`p`** sur **`k`**, sous forme de liste des chiffres, chiffre de poids fort en premier (on suppose qu'une telle écriture existe sur k chiffres).

    Par exemple, **`Ecriture(28,5,4)`** doit renvoyer **`[0, 1, 0, 3]`**

    On utilisera la méthode du cours pour l'écriture binaire, en utilisant des divisions euclidiennes par **`p`** plutôt que par 2.

19. Écrire une fonction **`EstElegante(L)`** prenant en argument une liste **`L`** et testant si c'est une écriture élégante.

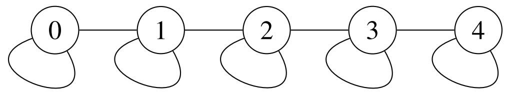
20. En déduire une fonction **`NbElegant(p,k)`** dénombrant le nombre d'écritures élégantes en base **`p`** sur **`k`** chiffres.

21. Déterminer la complexité de la fonction précédente, en fonction de **`p`** et **`k`**.

On cherche une autre façon de procéder à ce dénombrement, en traduisant le problème sous forme de graphe. Pour $p = 5$ et $k = 8$, pour construire un nombre élégant, on part d'un premier chiffre et on choisit les 7 suivants en respectant les règles suivantes :

- 0 est suivi de 0 ou 1 ;
- 1 est suivi de 0, 1 ou 2 ;
- 2 est suivi de 1, 2 ou 3 ;
- 3 est suivi de 2, 3 ou 4 ;
- 4 est suivi de 3 ou 4.

On construit donc le graphe dont les sommets sont les chiffres de 0 à 4, et tel qu'il y a une arête entre deux sommets si la différence entre les sommets vaut au plus 1. On obtient le graphe suivant :



Un nombre élégant à 8 chiffres en base 5 correspond alors à une suite de 8 sommets reliés par des arêtes qui forment un chemin, c'est-à-dire à un chemin de longueur 7 dans ce graphe.

22. Écrire M_1 la matrice d'adjacence correspondant au graphe du problème des nombres élégants en base 5.

23. Que dénombre le coefficient tout en haut à gauche de la matrice M_1^7 ?

24. Écrire une fonction **`MatrixElegant(p)`** qui renvoie la matrice correspondant au problème pour des nombres élégants en base p.

25. En déduire une fonction **`NbElegant2(p,k)`** qui renvoie le nombre de nombres élégants écrits en base p sur k chiffres en exploitant la représentation du problème par un graphe.

26. Déterminer la complexité de cette fonction.

27. Démontrer le théorème de la question 8. On pourra procéder par récurrence sur k.