TP 14 : APPLICATION DE DIJKSTRA AU TRAITEMENT D'IMAGE

1 Dijkstra

On rappelle que l'algorithme de Dijkstra travaille sur un graphe (orienté ou non) *pondéré* avec des poids positifs, représenté par listes d'adjacences, et calcule les distances et plus courts chemins de tous les sommets accessibles depuis un sommet source donné. Son pseudo-code est :

```
Fonction Dijkstra(G,s):
  D[s] vaut 0
  D[u] est infinie pour les autres sommets u
  les sommets n'ont initialement pas de père
  les sommets sont non marqués
  tant qu'il reste un sommet non marqué:
    soit u sommet non marqué de D[u] minimal
    on marque u
    pour chaque successeur v de u:
      on relâche l'arc (u,v), autrement dit :
      soit d' = D[u] + le poids w de l'arc (u,v)
      si d' est strictement inférieur à D[v]:
        D[v] = d'
        P[v] = u
  on renvoie D, P
```

Implémenter cet algorithme. On le testera sur le graphe suivant :

```
G1 = [[(1,10),(4,5)],
      [(2,1),(4,2)],
      [(3,4)],
      [(2,6),(0,7)],
      [(1,3),(2,9),(3,2)]]
```

2 Recadrage intelligent d'image

Le *seam carving* (ou recadrage intelligent), est un algorithme de redimensionnement d'image développé par Shai AVIDAN et Ariel SHAMIR. Cet algorithme redimensionne, non pas par une mise à l'échelle ou un recadrage classique, mais par une suppression des pixels considérés de moindre importance.

Nous allons mesurer l'importance d'un pixel avec son contraste comparé à ses plus proches voisins, mais d'autres techniques, comme de la détection de formes, peuvent être utilisées.

On considère l'image suivante, dont on veut réduire la largeur de manière intelligente.

Pour cela on va supprimer successivement des « chemins » verticaux bien choisis dans l'image. Un chemin est une suite de coordonnées $(0, y_0), (1, y_1), \dots (n-1, y_{n-1})$ où n est la hauteur de l'image et pour tout k, $y_k \in [\![0, p-1]\!]$ où p est la largeur de l'image, avec la contrainte $|y_{k+1} - y_k| \leq 1$. On trace ci-dessous en rouge un chemin vertical :

Une image est représentée par un tableau `numpy`. Chaque pixel `image[i,j]` est une liste de longueur 3 codant la couleur (RGB). Afin de transformer une image en tableau `numpy` on utilise la commande suivante :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

image = np.array(plt.imread('BroadwayTower.png'))
```

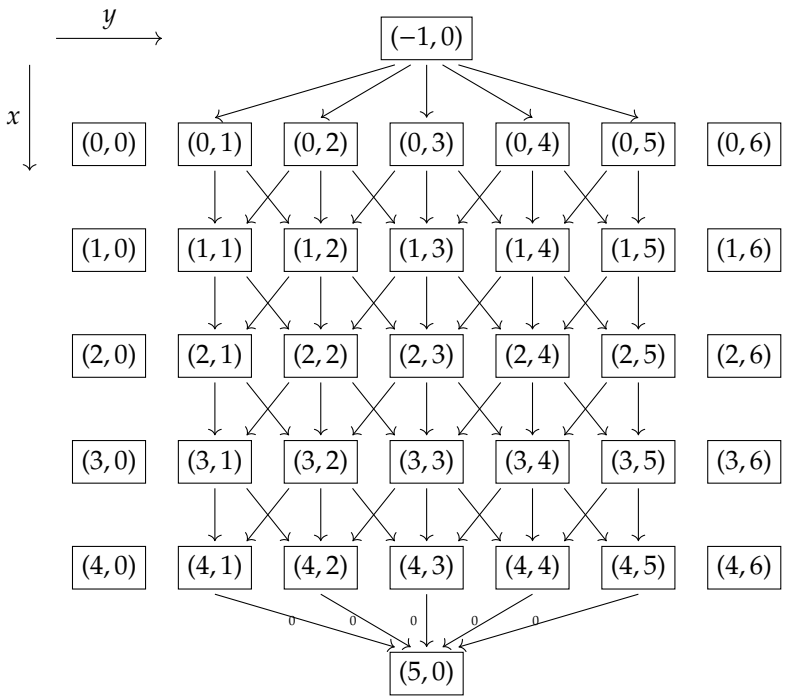
Pour récupérer la taille de l'image :

```
n, p, q = image.shape # n = nb de lignes, p = nb de colonnes, q = 3 en RGB
```

et pour afficher l'image :

```
plt.figure()
plt.imshow(image)
plt.title('image de depart')
plt.show()
```

Nous allons voir l'image comme un graphe où chaque pixel est un sommet, et où les arcs vont d'un sommet à chacun de ses voisins en dessous, sauf pour les pixels du bord. Si on schématise une image comportant 5 lignes et 7 colonnes, on obtient :



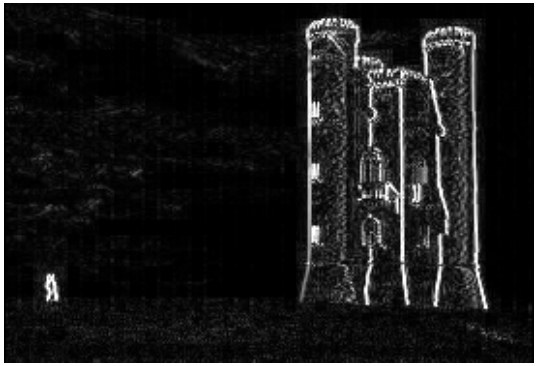
On a ajouté un sommet au-dessus et un sommet en-dessous de l'image, respectivement $(-1, 0)$ et $(n, 0)$ et des arcs reliant le sommet au-dessus à tous les pixels du bord supérieur de l'image, et reliant tous les pixels du bord inférieur de l'image au sommet en dessous. Cette astuce va nous permettre d'appliquer l'algorithme de Dijkstra en prenant pour sommet de départ $(-1, 0)$ et pour sommet d'arrivée $(n, 0)$.

On définit pour chaque pixel (excepté ceux des bords gauche et droit) une **énergie**, correspondant à la norme de la différence du vecteur des couleurs des pixels situés sur la même ligne juste à droite et juste à gauche : l'élément (x, y) contient la norme de la différence entre le pixel $(x, y+1)$ et $(x, y-1)$.
Rappel : si $u = (x, y, z)$ alors sa norme (pour le produit scalaire canonique) est $N(u) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

1. Écrire une fonction `energie` qui prend en argument une image sous forme d'un tableau `numpy` et renvoie un tableau numpy de même taille contenant l'énergie de chaque pixel (qu'on initialisera avec `np.zeros`). Pour les pixels des bords gauche et droit on laissera la valeur 0.

L'énergie du pixel est un bon candidat pour la longueur des arcs pointant vers ce pixel : en effet, un chemin empruntant un tel arc mettra en contact, une fois supprimé, les pixels $(x, y-1)$ et $(x, y+1)$, il est donc logique que le poids de cet arc soit d'autant plus grand que cette différence est forte. On considérera que les arcs pointant vers le sommet tout en dessous ont un poids nul.

Pour notre image, si on trace l'énergie en noir et blanc :



On utilise la commande suivante pour un tracé en noir et blanc :

```
plt.imshow(energie ,cmap=plt.cm.gray, vmin=0,vmax=1)
```

2. Écrire une fonction `arcs_sortants` prenant en entrée le tableau des énergies et un sommet (x, y), et renvoyant la liste des arcs sortants de ce sommet en accord avec la représentation de l'image sous forme de graphe expliquée précédemment. La fonction donnera aussi les arcs sortants pour le sommet spécial du haut. La liste des arcs sortants sera donnée sous forme d'une liste de couples `(sommet, energie)`, où `sommet` est le sommet vers lequel l'arc pointe et `energie` est l'énergie de ce sommet (donc le poids de l'arc pour l'algorithme de Dijkstra).
3. Écrire une fonction `dijkstra_image` prenant en argument une image et renvoyant la distance minimale entre les sommets spéciaux $(-1, 0)$ et $(n, 0)$ avec n la hauteur de l'image, ainsi que l'ensemble des prédécesseurs dans les plus courts chemins calculés. On utilisera des dictionnaires pour stocker les distances et les prédécesseurs. On stockera les sommets en attente dans un `set F`, contenant initialement le sommet source, puis à chaque étape on retirera le sommet u de F de distance minimale avec `F.remove(u)`, et pour chaque arc relâché (u, v) on ajoutera v avec `F.add(v)` si `D[v]` est modifié.
4. Écrire une fonction `chemin` prenant en argument le dictionnaire des prédécesseurs, et les sommets de départ et d'arrivée et reconstruisant le chemin reliant les deux sommets.
5. Écrire une fonction `supprimer_chemin` prenant en argument une image et un chemin donné par la fonction précédente et renvoyant une nouvelle image construite en supprimant les pixels du chemin dans l'image de départ.
6. Réduire la largeur de l'image de 50 pixels en répétant 50 fois l'opération.