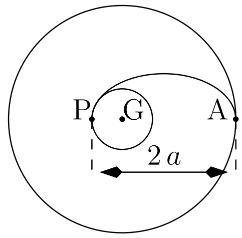
DM n° 12 de Physique
Mouvements à forces centrales



Mise en orbite d'un satellite

On s'intéresse à la mise en orbite d'un satellite de masse m dans le plan équatorial de la Terre, de centre de masse G. Ce satellite doit avoir au final une orbite circulaire de rayon R_1 décrite en $T = 12\,\text{h}$.

Pour placer ce satellite sur son orbite finale, on utilise une orbite elliptique de transfert, de grand axe $2\,a$. La base de lancement est située à l'équateur au point P. Le lancement est réalisé à la vitesse v_P dans le référentiel géocentrique et v_0 dans le référentiel terrestre. Au point A, on utilise les réacteurs pour faire passer le satellite de l'orbite de transfert, à la vitesse v_A, vers l'orbite circulaire, à la vitesse v_1, toutes deux exprimées dans le référentiel géocentrique.

On rappelle que la Terre est de masse $M_\text{T} = 5{,}98 \cdot 10^{24}\,\text{kg}$ et de rayon $R = 6380\,\text{km}$. La constante de gravitation universelle $\mathcal{G}$ vaut $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. On réalise l'étude dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

A Orbite circulaire

1. Définir le référentiel géocentrique.
2. On admet que la seule force s'exerçant sur le satellite est la force d'interaction gravitationnelle. Démontrer que le mouvement est plan.
3. Démontrer que le mouvement est uniforme.
4. Démontrer, spécifiquement pour ce mouvement simple, la troisième loi de Kepler reliant T et R_1.
5. Déterminer R_1 puis v_1 en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et T uniquement. Faire les applications numériques.

B Vitesses sur l'orbite de transfert

6. Démontrer que le moment cinétique reste constant. En déduire une relation entre v_A, v_P, R et R_1.
7. Exprimer l'énergie mécanique E du satellite au point A et au point P sur l'orbite de transfert. Démontrer que E s'exprime uniquement en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, m et a.
8. En déduire l'expression de v_P en fonction de $\mathcal{G}$, M_T, R et a. La calculer numériquement.
9. En tenant compte de la rotation de la Terre, en sachant que le lanceur en profite au maximum, calculer la vitesse v_0 à donner en P au satellite par rapport au référentiel terrestre.
10. Exprimer la vitesse du satellite en A. En déduire la valeur de l'augmentation de vitesse $\Delta v_\text{A} = v_1 - v_A$ qu'il faudra communiquer au satellite en A pour le mettre en orbite circulaire.

C Équation polaire de l'orbite de transfert

L'orbite du satellite étant elliptique, on admet que son équation polaire est

$$r = \frac{p}{1 + e\,\cos(\theta)}$$

où p est appelé le paramètre de la courbe et e l'excentricité. Pour une ellipse, on sait que $e \in\,]0{,}1[$.

11. Déterminer en fonction de p et e les valeurs extrêmes possibles de r. En déduire les expressions de R et de R_1, en fonction de p et e.
12. Déterminer l'excentricité en fonction de R_1 et R. Faire l'application numérique.

D Détermination de l'équation polaire

Cette partie, plus difficile, n'est à traiter qu'après s'être assuré que ce qui précède est correctement répondu et que la rédaction est propre. Elle ne compte qu'en bonus.

On souhaite désormais déterminer l'équation polaire de l'orbite de transfert utilisée dans la partie précédente. On doit pour cela utiliser un nouvel outil, appelé vecteur excentricité :

$$\overrightarrow{e} = \frac{\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{L}}{\mathcal{G}\, M_{\mathrm{T}}\, m} - \overrightarrow{u_{\mathrm{r}}}$$

où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse, $\overrightarrow{L}$ le moment cinétique du satellite par rapport au centre G du repère et $\overrightarrow{u_{\mathrm{r}}}$ le vecteur polaire défini par $\overrightarrow{GM} = r\,\overrightarrow{u_{\mathrm{r}}}$. On nomme $\overrightarrow{u_{\theta}}$ et $\overrightarrow{u_{\mathrm{z}}}$ les deux autres vecteurs du trièdre direct de la projection polaire. Le vecteur $\overrightarrow{u_{\mathrm{z}}}$ est vers l'intérieur de la feuille sur le schéma de début de problème.

13. Démontrer que le moment cinétique est constant sur l'ensemble de l'orbite de transfert.
14. Exprimer la vitesse $\overrightarrow{v}$ et le moment cinétique $\overrightarrow{L}$ dans les coordonnées polaires.
15. Montrer que la dérivée du vecteur excentricité est nulle à tout instant.
16. Exprimer le vecteur excentricité au point P, en fonction de $\mathcal{G}$, M_{T}, R et v_{P}.
17. À l'aide de la question précédente et de la question 7, montrer que le vecteur excentricité est colinéaire à $\overrightarrow{GP}$ et de même sens.

On choisit désormais le vecteur $\overrightarrow{u_{\mathrm{GP}}}$, vecteur unitaire associé à $\overrightarrow{GP}$, comme origine de θ pour l'ensemble de l'orbite de transfert. Le vecteur excentricité étant constant, on appelle e sa norme.

18. Exprimer $\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{u_{\mathrm{r}}}$ en fonction de e et θ, en tout point M de l'orbite de transfert.
19. À partir de la définition de $\overrightarrow{e}$, montrer que

$$\overrightarrow{e} \cdot \overrightarrow{OM} = \frac{L^2}{\mathcal{G}\, M_{\mathrm{T}}\, m^2} - r$$

20. En déduire l'équation polaire de l'ellipse.