DM n° 10 de Physique
Dynamique du point

A Chute libre d'une balle de golf

On étudie la chute libre d'une balle de golf de masse $m = 45{,}9\,\mathrm{g}$ dans le champ de pesanteur terrestre supposé uniforme ($g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$). La balle est lâchée sans vitesse initiale en O, point pris comme origine de l'axe z orienté vers le bas et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u_z}$.

A - a Résistance de l'air nulle

On ne tient pas compte ici de la résistance de l'air.

A.1 Montrer que le mouvement du centre de la balle est rectiligne.

A.2 Trouver l'équation horaire $z(t)$ du mouvement du centre de la balle.

A.3 À quel instant t_1 a-t-on $v = v_1 = 35\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? Quelle est alors la distance z_1 parcourue par la balle ?

A - b Résistance de l'air non nulle

La résistance qu'oppose l'air au mouvement de la balle est supposée de la forme $\overrightarrow{F} = -k\,v(t)\,\overrightarrow{v(t)}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse du centre de la balle et v sa norme. On admet que le mouvement reste rectiligne.

A.4 Déterminer une équation différentielle non linéaire en v. L'écrire sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \beta\left(1 - \alpha^2 v^2\right)$$

Donner l'expression de α ainsi que son unité SI.

Une solution de cette équation différentielle et l'expression de $z(t)$ correspondante sont

$$v(t) = \frac{1}{\alpha}\,\frac{\mathrm{e}^{(2\,\alpha\,\beta\,t)} - 1}{\mathrm{e}^{(2\,\alpha\,\beta\,t)} + 1} \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{1}{\alpha^2\,\beta}\,\ln\left(\frac{\mathrm{e}^{(\alpha\,\beta\,t)} + \mathrm{e}^{(-\alpha\,\beta\,t)}}{2}\right)$$

A.5 Vérifier que $v(t)$ est bien solution de l'équation différentielle.

A.6 Vérifier que les conditions initiales du mouvement, que l'on précisera, sont satisfaites.

A.7 Déterminer l'expression de la vitesse limite v_{lim} que la balle peut atteindre, en fonction de g, m et k.

A.8 Que vaut k si $v_{\text{lim}} = 35\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$? *(L'unité « U.S.I. » ne sera pas acceptée)*

Cette vitesse est atteinte approximativement (à 99%) au bout de $t_2 = 9{,}5\,\mathrm{s}$.

A.9 Quelle est alors la distance parcourue par la balle ? Commenter ce résultat.

B Glissement le long d'une pente

Un objet supposé ponctuel, de masse $m = 1\,\mathrm{kg}$, est lâché à $t = 0$ sans vitesse initiale au point O ($x = 0$) sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = \pi/6$ avec l'horizontale. Le champ de pesanteur terrestre est supposé uniforme ($g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$). On suppose qu'il n'y a pas de mouvement selon l'axe Oy. On note l'axe Ox parallèle à la pente et descendant, tandis que Oz est perpendiculaire à la pente et ascendant. $\overrightarrow{u_\mathrm{x}}$ et $\overrightarrow{u_\mathrm{z}}$ sont les vecteurs unitaires correspondants à ces deux axes.

B - a Glissement sans frottement

On considère dans un premier temps qu'il n'y a pas de frottement.

B.1 Déterminer l'équation différentielle du mouvement.

B.2 En déduire l'expression de la vitesse $v(t)$ et de la distance parcourue $x(t)$.

B.3 Exprimer alors v en fonction de x et des constantes g et α.

B.4 Calculer la vitesse v_1 pour une distance parcourue $x_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$.

B - b Glissement avec frottement

On trouve expérimentalement que la vitesse vaut $v_1' = 4{,}5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ lorsque $x_1 = 2{,}5\,\mathrm{m}$. Il y a donc des frottements. On décide de les modéliser par des frottements solides, par une force $\overrightarrow{T}$ constante et opposée au mouvement.

B.5 Exprimer T en fonction de m, g, α, x_1 et v_1', puis en fonction de m, x_1, v_1 et v_1'.

B.6 Calculer la valeur de T.

Il s'agit d'un frottement solide : $\overrightarrow{T} = -f\,R\,\overrightarrow{u_\mathrm{x}}$ où f est le coefficient de frottements (constant) et R la norme de la réaction normale du support.

B.7 Exprimer f en fonction de g, x_1, v_1, v_1' et α. Réaliser l'application numérique.