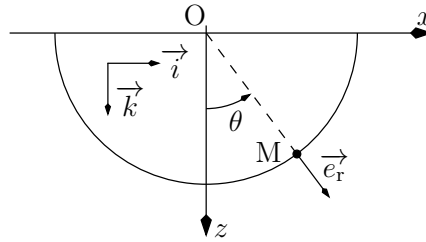


DM n° 11 de Physique

Dynamique du point et théorèmes énergétiques

Oscillateur contraint à ressort

On considère un point matériel M de masse m se déplaçant sur un demi-cercle de rayon R dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = g \vec{k}$. On repère la position de M par l'angle $\theta = (\vec{k}, \overrightarrow{OM})$.



A Mouvement sans frottement

On considère tout d'abord que les frottements entre le point matériel et le cercle sont négligeables.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ .
2. Que devient-elle dans le cas de petites oscillations ?
3. Quelles sont les positions d'équilibres ? S'agit-il d'équilibres stables ou instables ?

B Mouvement avec frottement

On se restreint désormais à de petites oscillations. On considère que le point matériel est soumis à une force supplémentaire de frottement fluide, d'expression $\vec{F}(t) = -\mu \vec{v}(t)$, où μ est le coefficient de frottement, constant et $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse de M .

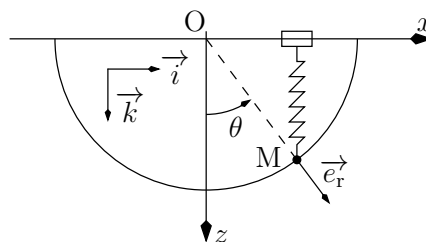
4. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ .
5. Mettre cette équation sous forme canonique. Déterminer l'expression de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q en fonction de m , μ , g et R . Donner leur dimension.
6. Qu'est-ce que le régime critique ? Donner l'expression μ_c du coefficient μ dans ce cas.

Les conditions initiales sont $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$.

7. Donner l'expression ainsi que l'allure de $\theta(t)$ dans les trois cas possibles ($\mu < \mu_c$, $\mu = \mu_c$ et $\mu > \mu_c$). Précisez les noms de ces trois régimes.

C Ressort supplémentaire

On néglige à nouveau les frottements. Le point matériel est maintenant également fixé à un ressort de longueur au repos $\ell_0 < R$ et de raideur k . L'autre extrémité du ressort peut glisser sans frottement sur une tige fixe horizontale confondue avec l'axe Ox . Le ressort reste toujours vertical, se déplaçant uniquement perpendiculairement à la tige. On suppose que la relation $mg < k(R - \ell_0)$ est toujours vérifiée.



8. Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point matériel M . Les exprimer en fonction de θ lorsque cela est possible.
9. Exprimer l'énergie potentielle E_p totale correspondante à ces interactions.
10. Quelles sont les positions d'équilibres ? S'agit-il d'équilibres stables ou instables ?

On note $\theta = \theta_e$ à la position d'équilibre stable telle que $0 < \theta_e < \pi/2$.

11. Que peut-on dire de la réaction du cerceau à l'équilibre en $\theta = \theta_e$?

On donne le « développement limité à l'ordre 2 autour de $\theta = \theta_e$ » de la fonction $E_p(\theta)$:

$$E_p(\theta) = E_p(\theta_e) + (\theta - \theta_e) k_1 + \frac{(\theta - \theta_e)^2}{2} k_2$$

avec

$$k_1 = \left. \frac{dE_p}{d\theta} \right|_{\theta=\theta_e} \quad (\text{valeur de la dérivée première de } E_p \text{ pour } \theta = \theta_e)$$

$$k_2 = \left. \frac{d^2E_p}{d\theta^2} \right|_{\theta=\theta_e} \quad (\text{valeur de la dérivée seconde de } E_p \text{ pour } \theta = \theta_e)$$

12. Établir l'équation différentielle vérifiée par θ pour de petites oscillations autour de θ_e .
13. Quelle est l'expression générale de la solution de cette équation différentielle ? À quoi correspond le terme $\frac{k}{m} (\sin \theta_e)^2$?