TD n° 16 de Physique
Mécanique - Théorème du moment cinétique

Applications directes du cours

1 Pendule simple

On considère un pendule simple (point matériel M de masse m), de longueur ℓ, laissé sans vitesse initiale depuis un angle faible α par rapport à la verticale. On suppose que son mouvement est plan et on utilise des coordonnées polaires dans le plan du mouvement.
Déterminer le moment des forces appliquées à M par rapport au point O d'attache du fil.
En déduire l'équation différentielle du mouvement de M.

2 Mouvement plan du pendule simple

On considère un pendule simple (point matériel M de masse m), laissé sans vitesse initiale depuis un angle α par rapport à la verticale. Déterminer la valeur initiale du moment cinétique de M en O. Déduire du moment des forces appliquée à M par rapport à O que le mouvement est plan, dont on déterminera la normale.

Exercices

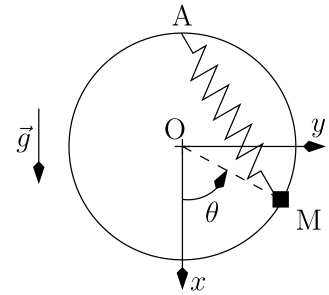
1 Toboggan

Un enfant, assimilé à un point matériel E de masse $m = 20\,\text{kg}$, glisse sur un toboggan en forme d'arc de cercle, de rayon $R = 2{,}5\,\text{m}$. Il s'élance à un angle $\theta_0 = 15°$ par rapport à l'horizontale, et sort du toboggan pour $\theta_1 = 90°$ (θ augmente au cours du temps). Les frottements sont négligés.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant. On utilisera le TMC par rapport à l'axe de rotation de E.
2. En déduire la vitesse v en fonction de θ (indice : multiplier par $\dot{\theta}$ l'équation précédente...).
3. Calculer la vitesse maximale atteinte. Commenter.

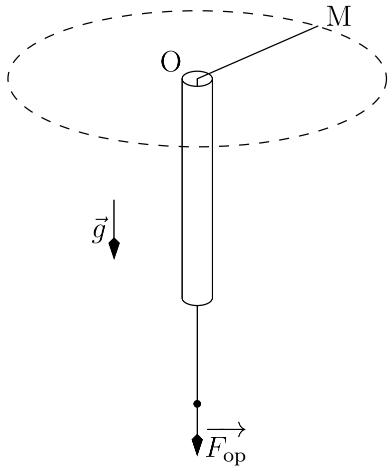
2 Rappel élastique le long d'un cercle

Une masselotte, assimilée à un point matériel M de masse m, est assujettie à glisser sans frottements sur un cercle vertical de center O et de rayon R. Elle est reliée au sommet du cercle noté A par un ressort de constante de raideur k et de longueur au repos ℓ_0.



1. Établir l'équation différentielle du mouvement de M, selon trois méthodes :
   – le théorème du moment cinétique
   – le principe fondamental de la dynamique
   – le théorème de l'énergie mécanique
2. Déterminer les positions d'équilibres. Quelles conditions faut-il sur les constantes du problème pour que trois positions d'équilibres existent ?
3. Étudier alors leur stabilité.

3 Fronde de longueur variable



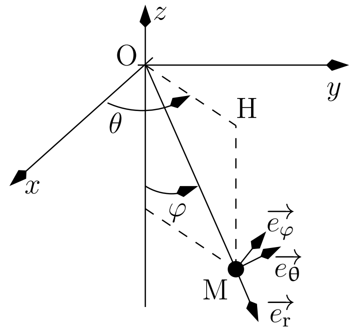
Une fronde est constituée d'une masselotte A de $m = 100\,\text{g}$ attachée à un fil de longueur ℓ. Sa trajectoire est initialement un cercle horizontal, de centre O et de rayon $\ell_0 = 1\,\text{m}$, parcouru avec une vitesse uniforme v_0. Le fil passe dans un tube vertical de très faible diamètre, centré en O, qui permet de faire varier ℓ en tirant sur son extrémité inférieure (force $\overrightarrow{F_{\text{op}}}$ exercée par un opérateur).

1. Sachant que la fronde fait 2 tours par seconde, comparer la force de tension du fil et le poids de la masse m. Commenter.
2. Déterminer les valeurs de la vitesse de A, de son moment cinétique en O et de son énergie cinétique.

On tire sur le fil à l'extrémité, avec une force $\overrightarrow{F_{\text{op}}}$.

3. Que peut-on dire sur l'évolution du moment cinétique et de l'énergie cinétique ?
4. Calculer la vitesse de A et son énergie cinétique lorsque la longueur du fil de la fronde est réduite de moitié.
5. En déduire le travail de $\overrightarrow{F_{\text{op}}}$.
6. Retrouver ce résultat par le calcul direct.

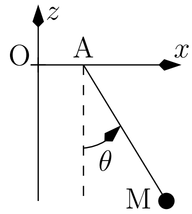
4 Pendule en rotation uniforme



L'extrémité O d'un fil OM de masse négligeable et de longueur ℓ est fixe. Un objet quasi-ponctuel de masse m est suspendu en M. L'objet est écarté d'un angle α par rapport à la verticale, puis lancé horizontalement. On décrit le mouvement du point M à l'aide de coordonnées sphériques, indiquées ci-contre ($\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_{\text{r}}}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ est horizontal et orthogonal à $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{e_\varphi} = \overrightarrow{e_{\text{r}}} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$). On souhaite qu'il décrive des cercles horizontaux.

1. Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O, dans le cas où le mouvement est circulaire.
2. Exprimer le moment des forces appliquées à l'objet par rapport à O.
3. En déduire la vitesse angulaire de rotation du point M dans le plan du mouvement.
4. Exprimer la période de révolution en fonction de g, ℓ et α.

5 TMC appliqué sur un point mobile



On considère un pendule simple, de masse m et de longueur ℓ. L'extrémité A subit de petites oscillations le long de l'axe horizontal, telles que $x_{\text{A}} = x_0\,\sin(\omega\,t)$.

1. Il est dans ce cas préférable d'appliquer le théorème du moment cinétique au point mobile A plutôt qu'au point fixe O. Pourquoi ?
2. Reprendre la démonstration du théorème du moment cinétique. Quel terme additionnel intervient alors ?
3. Déterminer la dérivée $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_{\text{A}}}}{\mathrm{d}t}$ à l'aide du théorème du moment cinétique.
4. Établir l'équation du mouvement du pendule simple effectuant de petites oscillations.
5. Quel est l'évolution de $\theta(t)$ lorsqu'un régime sinusoïdal permanent s'est établi ?
6. Pour quelle valeur ω_{r} de la pulsation ω y aura-t-il résonance ?
7. Que peut-on dire du déphasage lorsque $\omega > \omega_{\text{r}}$? $\omega < \omega_{\text{r}}$?