TD n° 18 de Physique
Mécanique - Mécanique du solide

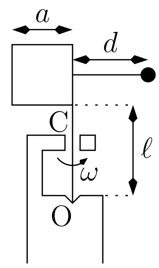
Applications directes du cours

1 Moments d'inertie et moments cinétiques

Le moment d'inertie de la Terre autour de l'axe passant par ses pôles vaut $J = 0{,}33\, M_{\mathrm{T}}\, R_{\mathrm{T}}{}^2$. Calculer ce moment d'inertie ainsi que le moment cinétique de la Terre par rapport à l'axe de ses pôles. On donne : $M_{\mathrm{T}} = 6{,}0 \cdot 10^{24}$ kg et $R_{\mathrm{T}} = 6{,}4 \cdot 10^3$ km.

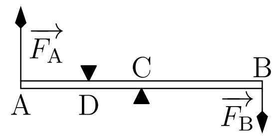
Un tambour de machine à laver de rayon $R = 25$ cm et de masse $m = 5$ kg tourne à une vitesse angulaire de $1000\,\mathrm{tr{\cdot}min^{-1}}$. Calculer son moment cinétique par rapport à son axe de rotation sachant que son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J = m\, R^2$.

2 Équilibre d'une girouette



Une plaque métallique carrée de côté a, d'épaisseur négligeable, de masse M, homogène, est solidaire d'un axe de longueur ℓ, de masse négligeable, dont l'extrémité inférieure O repose sur la tête de mât. Un collier C assure le guidage.
On équilibre la plaque par une masse ponctuelle m placée sur une tige sans masse à une hauteur $\ell + a/2$ de O. Donner la distance d de la masse à l'axe pour que le centre d'inertie de l'ensemble soit sur l'axe (équilibrage statique).

3 Poutre en équilibre



Une règle homogène de longueur $AB = \ell$ a une masse m. Elle repose horizontalement en son milieu sur un appui C. Aux extrémités A et B, on lui applique deux forces $\overrightarrow{F_{\mathrm{A}}}$ et $\overrightarrow{F_{\mathrm{B}}}$ de sens opposé. Pour maintenir l'équilibre, on place un second appui en D, milieu de AC, au dessus de la règle.
Exprimer, en fonction des données du problème, les intensités T_{C} et T_{D} des forces perpendiculaires à AB exercées respectivement par les appuis C et D sur la règle.

Exercices

1 Cycliste

Un cycliste, élève de PCSI, de masse $m_{\mathrm{c}} = 75$ kg, roule à vélo sur une route rectiligne et horizontale, à la vitesse constante $v_0 = 42\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. On étudie dans un premier temps la rotation d'une des roues par rapport au référentiel lié au cadre du vélo : elle est assimilable à un cerceau de section négligeable, de masse $m_{\mathrm{v}} = 1450$ g, de diamètre $D = 65$ cm. La masse totale du vélo est $m_{\mathrm{tot}} = 9100$ g. Les roues roulent sans glisser sur le sol.

1. Si le référentiel terrestre est supposé galiléen, que peut-on dire du référentiel lié au vélo ?
2. Calculer la vitesse angulaire de la roue.
3. Calculer l'énergie cinétique de rotation de la roue (dans le référentiel lié au vélo).
4. Calculer l'énergie cinétique totale du cycliste et de son vélo dans le référentiel terrestre, somme des énergies cinétiques de rotation des deux roues et de l'énergie cinétique de translation de l'ensemble.
5. Le cycliste freine et met $\Delta t = 7{,}3$ s pour s'arrêter. Calculer la puissance moyenne de la force de freinage.

2 Chute d'un arbre

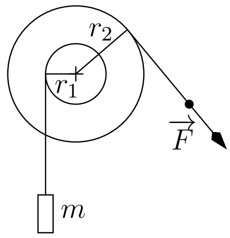
On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m. On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas. On repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, θ vaut $\theta_0 = 5°$ et l'arbre est immobile. On donne le moment d'inertie par rapport à son extrémité $I = \frac{1}{3}\, m\, L^2$.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de chute de l'arbre.
2. Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ avec la verticale, sa vitesse angulaire vaut :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3\,g}{L}\,(\cos\theta_0 - \cos\theta)}$$

3. Montrer que cette relation peut être réécrite : $\sqrt{\frac{3\,g}{L}}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}}$
4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne pour $\theta_0 = 5°$: $\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\cos\theta_0 - \cos\theta}} = 5{,}1$.

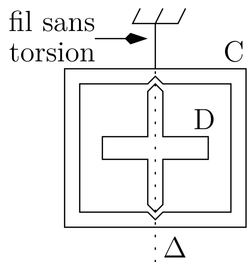
3 Treuil à deux cylindres



Deux filins sont enroulés autour d'un treuil à deux cylindres de rayons $r_1 = 5{,}0\,\text{cm}$ et $r_2 = 8{,}0\,\text{cm}$. L'un des deux filins est attaché à une charge de masse $m = 1{,}0\,\text{kg}$ que l'on souhaite soulever en exerçant sur l'autre une force $\vec{F}$ comme indiqué sur la figure. Le moment d'inertie du treuil par rapport à l'axe de rotation est $J = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{kg·m}^2$. Au début, la masse est posée au sol et sa vitesse est nulle. On prend $g = 10\,\text{m·s}^{-2}$.

1. Quelle est l'intensité minimale de la force pour que la masse se soulève ?
2. L'opérateur exerce une force de 8 N. Cette force serait-elle suffisante si l'opérateur tirait verticalement sur la masse sans passer par le treuil ?
3. Quelle est l'énergie potentielle acquise par la masse lorsqu'elle a parcouru une hauteur $h = 1{,}0\,\text{m}$?
4. Quel est le travail effectué par l'opérateur (qui exerce toujours une force de 8 N) dans cette phase ?
5. Pourquoi ces deux grandeurs ne sont-elles pas égales ?
6. Quelle est la vitesse de la masse à la fin de cette phase ?

4 Entraînement par frottement de pivotement



Un disque D pivote à l'intérieur d'un cadre C. On note J_{D} et J_{C} leur moment d'inertie par rapport à l'axe Δ.
À $t = 0$, C est au repos et D y tourne à la vitesse angulaire ω_0. Le frottement de pivotement au niveau des pivots se traduit par un moment constant de valeur absolue Γ par rapport à l'axe Δ.

1. Quelle est la vitesse angulaire finale ω_{f} du système (C+D) ?
2. Calculer ω_{C} et ω_{D} en fonction du temps.
3. Au bout de quel temps t_{f} atteint-on ω_{f} ?
4. Calculer les variations d'énergie cinétique $\Delta E_{\mathrm{c}}(C)$ et $\Delta E_{\mathrm{c}}(D)$ du cadre et du disque.
5. En déduire celle ΔE_{c} de l'ensemble.
6. Faire un bilan énergétique et en déduire l'énergie W_{f} transformée en chaleur par frottement.