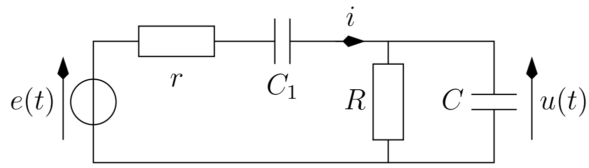
TD n° 6 de Physique
Électricité - Régimes transitoires d'ordre 2

Applications directes du cours

1 Mise en équation



Déterminer l'équation différentielle régissant l'évolution de la tension u, sous une forme canonique. Donner l'expression des constantes de cette équation.

Entraînement : changer un des condensateurs en bobine, puis l'autre, puis les deux.

2 Valeurs initiales et finales

Déterminer, sur le schéma ci-dessus, les valeurs de u et de i à $t = 0$, en considérant les condensateurs déchargés initialement.

Déterminer les valeurs de u et de i à quand t tend vers l'infini.

Entraînement : changer un des condensateurs en bobine, puis l'autre, puis les deux.

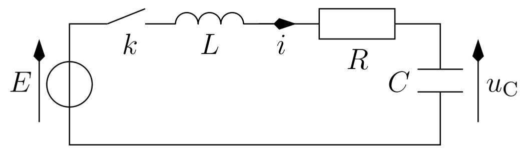
3 Solutions bornées

Soit un oscillateur harmonique amorti, dont l'équation différentielle est linéaire, du deuxième ordre, à coefficients constants a, b et c. Montrer que les solutions possibles sont bornées seulement si a, b et c sont de même signe.

Mettre cette équation différentielle sous forme canonique et déterminer les trois types de régimes possibles si la grandeurs étudiée x a comme conditions initiales $x(0) = X_0$ et $\dot{x}(0) = 0$.

Exercices

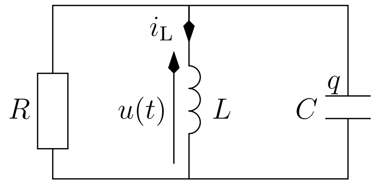
1 Circuit R,L,C série ⋆



On considère le circuit ci-contre dans lequel l'interrupteur est initialement ouvert et le condensateur C déchargé. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.
On donne $R = 50\,\Omega$, $C = 200\,\mu\text{F}$ et $L = 10\,\text{mH}$.

1. Déterminer les valeurs initiales de u_C, de i et de $\frac{\mathrm{d}u_\text{C}}{\mathrm{d}t}$.
2. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de u_C. La mettre sous forme canonique en faisant apparaître le facteur de qualité Q et la pulsation propre ω_0.
3. En déduire l'expression de u_C. Tracer l'allure de son évolution temporelle.
4. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$. La mettre sous forme canonique. Commenter les expressions des constantes.
5. Exprimer $i(t)$ et tracer son allure.

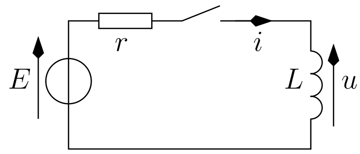
2 Régime libre d'un circuit « bouchon » ⋆⋆



On considère le montage «bouchon» ci-contre, avec $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$, $L = 100\,\mathrm{mH}$, et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$. On prendra, pour conditions initiales, à $t = 0$, une charge du condensateur de valeur $q(t = 0) = q_0$ et l'intensité dans la bobine de valeur $i_L(t = 0) = \frac{q_0}{2\,R\,C}$.

1. Déterminer l'équation différentielle qui régit l'évolution de $u(t)$ et les constantes associées.
2. Calculer la valeur du facteur de qualité Q et de la pulsation propre ω_0. Quel est le type de régime du circuit ?
3. Déterminer les deux conditions initiales à prendre en compte.
4. Déterminer l'expression complète de $u(t)$.
5. Tracer l'allure de $u(t)$ en indiquant notamment la tangente à l'origine et la pseudo-période.
6. Calculer l'écart relatif de la pseudo-période T à la période propre T_0. Commenter.

3 Surtension aux bornes d'une bobine ⋆⋆



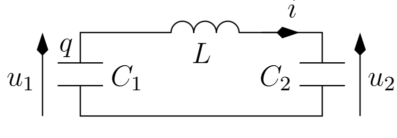
On connecte un appareil *globalement inductif*, assimilable à une inductance $L = 0{,}4\,\mathrm{H}$, à un générateur réel de fém $E = 30\,\mathrm{V}$ et de résistance interne $r = 50\,\Omega$. Alors que l'interrupteur est ouvert depuis longtemps, on le ferme.

1. Établir l'expression de la tension $u(t)$ aux bornes de la bobine.
2. Au bout de combien de temps peut-on dire que le régime permanent est atteint ?
3. On suppose, après avoir atteint le régime permanent, que l'on tente d'ouvrir l'interrupteur. Pourquoi cela pose-t-il un problème avec le modèle d'interrupteur utilisé dans le schéma ?

Dans les premiers instants de l'ouverture de l'interrupteur, celui-ci se modélise par un condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{pF}$. Pour cette partie, on positionne l'origine des temps $t = 0$ à l'ouverture de l'interrupteur.

4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$. Commenter la valeur du facteur de qualité.
5. Montrer que $u(0^+) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}u(0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{r\,C}$.
6. Déterminer, en justifiant l'approximation choisie, l'expression de $u(t)$.
7. Quelle est la tension maximale atteinte ? À quel instant ? Conclure sur le phénomène électrique qui risque de se produire lors de cette expérience.

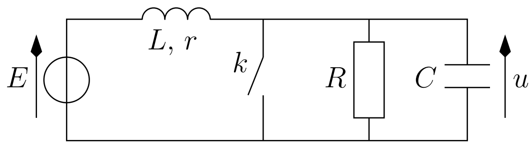
4 Circuit oscillant ⋆⋆



Soit le montage ci-contre. À l'instant $t = 0$, un condensateur de capacité C_1 et de charge initiale q_0 est connecté à un groupement série L, C_2. Le condensateur de capacité C_2 est initialement déchargé. Pour simplifier, on prendra $C_1 = C_2 = C$.

1. Établir l'équation différentielle régissant l'évolution de $i(t)$.
2. Déterminer et tracer $i(t)$.
3. En déduire les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$ et tracer les allures des graphes correspondants.
4. Effectuer un bilan des puissances reçues par la bobine et par l'ensemble des deux condensateurs.

5 Surtension aux bornes d'un condensateur ⋆⋆⋆



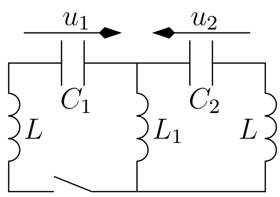
On considère le circuit ci-contre. La bobine possède une inductance L et une résistance interne r. L'interrupteur étant fermé *depuis très longtemps*, on l'ouvre à l'instant $t = 0$.

1. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par la tension $u(t)$ aux bornes du condensateur.
2. Déterminer les deux conditions initiales $u(t = 0^+)$ et $\frac{\mathrm{d}u(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$.
3. À l'aide d'un schéma équivalent, établir la tension u_∞ aux bornes du condensateur une fois le régime permanent pour $t > 0$ atteint.

Afin de ne pas endommager le condensateur lors de la fermeture de l'interrupteur, on souhaite que la tension $u(t)$ à ses bornes ne dépasse jamais u_∞.

4. Quelle relation entre r, L, C et R doit alors être vérifiée ?
5. Que devient-elle si l'on souhaite de plus atteindre le régime permanent le plus rapidement possible ?
6. Établir dans ce dernier cas l'expression de $u(t)$ et tracer son allure.

6 Étude de circuits couplés ⋆⋆⋆



On considère le circuit ci-contre, où avant l'instant $t = 0$, le condensateur C_1 est chargé à la tension u_0, le condensateur C_2 n'est pas chargé et aucun courant ne circule. On ferme l'interrupteur à $t = 0$. Les deux capacités C_1 et C_2 sont supposées égales, notées C.

1. Établir le système d'équations différentielles couplées en $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

On pose $S = u_1 + u_2$ et $D = u_1 - u_2$. On note

$$\frac{1}{L\,C} = {\omega_0}^2 \qquad \frac{1}{(L + 2\,L_1)\,C} = {\omega_1}^2 \qquad \frac{L_1}{L} = k \text{ (coefficient de couplage)}$$

2. Quelles sont les équations différentielles satisfaites par $S(t)$ et $D(t)$?
3. Déterminer $S(t)$ et $D(t)$.
4. En déduire $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
5. Dans le cas d'un faible couplage, soit $k \ll 1$, simplifier les expressions de $u_1(t)$ et $u_2(t)$.
   On fera intervenir la pulsation $\omega = \frac{k}{2}\,\omega_0$.
6. Représenter, à l'aide de la calculatrice ou de Python, l'allure du graphe $\frac{u_2(t)}{u_0}$ pour $k = 0{,}1$ en fonction de $\frac{t}{T_0}$ (avec $T_0 = \frac{2\,\pi}{\omega_0}$).