

Pour bien commencer

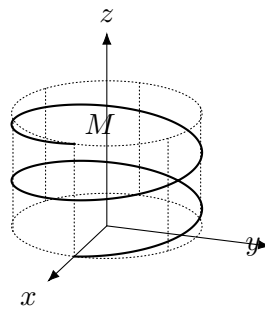
Exercice 1

Un point M décrit une hélice circulaire d'axe Oz . Ses équations horaires sont :

$$x = a \cos \theta(t), \quad y = a \sin \theta(t), \quad z = h\theta(t).$$

a est le rayon du cylindre de révolution sur lequel est tracé l'hélice, h est une constante et θ est l'angle que fait avec Ox la projection $\overrightarrow{OM'}$ de \overrightarrow{OM} sur Oxy .

1. Donner en coordonnées cylindriques, et en fonction de θ et de ses dérivées les expressions de la vitesse et de l'accélération.
2. Montrer que le vecteur vitesse fait avec le plan Oxy un angle constant. (Il y a une manière détournée et très simple de faire la question)
3. Montrer que si le mouvement de rotation est uniforme, le vecteur accélération passe par l'axe du cylindre (rappelez vous de quel vecteur unitaire il s'agit). Calculer le rayon de courbure (rappelez-vous du repère de Frenet).



Exercice 2 — Laboratoire spatial

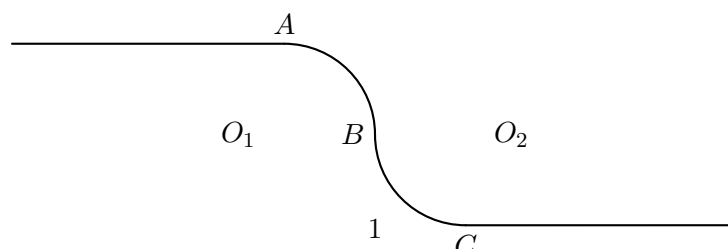
Un laboratoire spatial, constitué de deux anneaux concentriques de même axe, est en rotation uniforme autour de cet axe de manière à créer une gravité artificielle. Sa période de rotation T est choisie de manière à ce que l'accélération soit égale à \vec{g}_T , l'accélération de pesanteur sur Terre ($9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) au niveau de l'un des anneaux (de rayon $r_1 = 2,15 \text{ km}$), et à \vec{g}_M , l'accélération de la pesanteur sur Mars ($3,72 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$), au niveau de l'autre.

Déterminer la valeur de la période de rotation T ainsi que le rayon r_2 du second anneau.

Exercice 3

Préciser l'accélération subie par un mobile se déplaçant à la vitesse v constante sur une trajectoire formée de deux segments rectilignes parallèles, raccordés par deux quarts de cercle de même rayon R : avant A , entre A et B , entre B et C , après C .

$$\text{A.N. : } v = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} \text{ et } R = 20 \text{ m.}$$

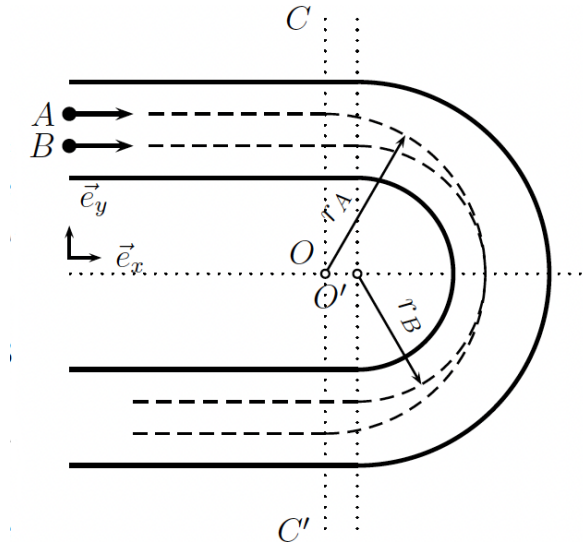


Exercice 4

Lors d'un grand prix, deux voitures (A et B) arrivent en ligne droite, coupent l'axe CC' au même instant et prennent le virage de deux manières différentes :

- la voiture A suit une trajectoire circulaire de centre O et de rayon $r_A = 90$ m ;
- la voiture B négocie le même virage sur une trajectoire circulaire de centre O' et de rayon $r_B = 75$ m.

On appelle \mathcal{R} le référentiel $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le but de l'exercice est de déterminer laquelle des deux voitures sortira en premier du virage en coupant à nouveau l'axe CC' .



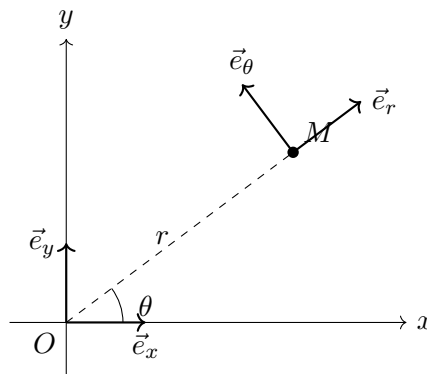
1. Déterminer littéralement puis numériquement les longueurs L_A et L_B des trajectoires des deux voitures. Peut-on conclure ?
2. On suppose que les deux voitures roulent à des vitesses v_A et v_B constantes pendant tout le virage. Déterminer ces vitesses pour que, dans les virages, les accélérations des deux voitures restent inférieures à $0,8g$ avec g la constante de pesanteur (au-delà de cette limite, elles dérapent et finissent leur route dans les graviers). Faire les applications numériques.
3. Conclure.

Exercice 5

(d'après concours ENAC)

On étudie la trajectoire plane d'un mobile ponctuel M dans le référentiel du laboratoire \mathcal{R} . On associe à ce référentiel matérialisé par un système d'axes la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. O est un point fixe de \mathcal{R} .

La position de M est repérée par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan de sa trajectoire représenté sur la figure ci-contre. Les vecteurs sont exprimés dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. On appelle respectivement composante radiale et composante orthoradiale, les composantes d'un vecteur dans cette base.



On note ainsi (v_r, v_θ) les composantes de la vitesse de M et (a_r, a_θ) celles de son accélération. On note par ailleurs v la norme de la vitesse, a celle de l'accélération.

Les équations horaires du mouvement de M sont :

$$r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \quad \text{et} \quad \theta(t) = \Omega t$$

avec r_0 , τ et Ω des constantes strictement positives.

Lors des applications numériques, on prendra : $r_0 = 1 \text{ m}$; $\tau = 2,5 \text{ s}$; $\Omega = 0,3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Question 1 :

À quelle date t_1 la composante radiale du vecteur \overrightarrow{OM} vaut-elle le dixième de sa valeur initiale ?

- A) $t_1 = \tau$ B) $t_1 = \tau \ln(10)$ C) $t_1 = 10\tau$ D) $t_1 = \frac{\tau}{\ln(10)}$

Question 2 :

Exprimer les composantes de la vitesse de M :

- A) $v_r = \frac{r_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ C) $v_\theta = r_0 \Omega e^{-t/\tau}$
 B) $v_r = -\frac{r_0}{\tau} e^{-t/\tau}$ D) $v_\theta = r_0 \Omega$

Question 3 :

Exprimer les composantes de l'accélération de M :

- A) $a_r = r_0 \left(\frac{1}{\tau^2} - \Omega^2 \right) e^{-t/\tau}$ C) $a_\theta = \frac{2r_0 \Omega}{\tau}$
 B) $a_r = \frac{r_0}{\tau} \left(\frac{1}{\tau} + \Omega \right) e^{-t/\tau}$ D) $a_\theta = -\frac{2r_0 \Omega}{\tau} e^{-t/\tau}$

Question 4 :

Donner l'expression des normes de la vitesse et de l'accélération :

- A) $v = r_0 \left(\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2 \right) e^{-t/\tau}$ C) $a = r_0 \left(\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2 \right) e^{-t/\tau}$
 B) $v = r_0 \left(\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2 \right)^{1/2} e^{-t/\tau}$ D) $a = r_0 \left(\frac{1}{\tau^2} + \Omega^2 \right)^{1/2} e^{-t/\tau}$

Question 5 :

Que vaut le rapport a/v ?

- A) $a/v = 0,25 \text{ s}^{-1}$ C) $a/v = 1 \text{ s}^{-1}$
 B) $a/v = 0,5 \text{ s}^{-1}$ D) $a/v = 4 \text{ s}^{-1}$

Question 6 :

On note $\alpha = \widehat{(\overrightarrow{OM}, \vec{v})}$ l'angle que forme, à tout instant, le vecteur vitesse de M avec son vecteur position.

On a :

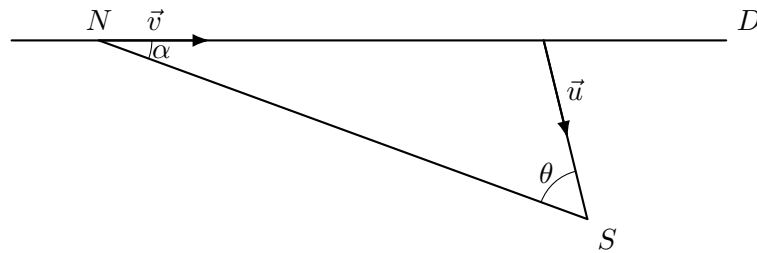
- A) $\alpha = \pi/2$ C) $\cos(\alpha) = -(1 + \Omega^2 \tau^2)^{-1/2}$
 B) α dépend du temps D) $\cos(\alpha) = -0,8$

Pour aller plus loin

Exercice 6

Un navire N est animé d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse v , le long d'une droite D . Un sous-marin immobile S tire une torpille T à l'instant où l'angle (NS, \vec{v}) a la valeur α . T étant animée d'un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse u .

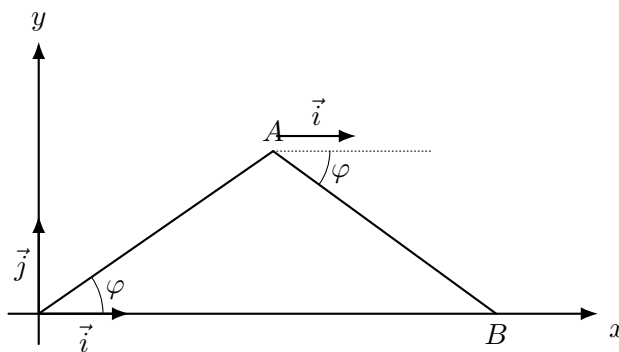
1. Quelle doit être la valeur de l'angle de tir $\theta = (\vec{u}, SN)$ si l'on veut couler N ?
2. Si l'on veut que T atteigne N en un temps minimum, à quel instant, c'est-à-dire pour quelle valeur de α , convient-il de tirer ? (on donnera la relation entre α et θ). Calculer la valeur de l'angle de tir θ correspondante.



Exercice 7

Soit un système constitué de deux barres identiques OA et AB , de longueur $2b$, articulées en A et assujetties à rester dans le plan (O, \vec{i}, \vec{j}) . B glisse le long de l'axe Ox et l'angle $\varphi = (\vec{i}, \overrightarrow{OA})$ vérifie $\varphi = \omega t$ avec ω constant.

- Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du milieu M de AB .
- Déterminer l'accélération de M .



Exercice 8

Quatre mouches identiques sont placées aux quatre sommets d'un carré de côté a , situé dans un plan horizontal. À l'instant initial $t =$, chaque mouche se met à courir avec une vitesse de norme constante v_0 , en poursuivant toujours la mouche située au sommet voisin dans le sens horaire.

On supposera que le mouvement est continu et que chaque mouche ajuste instantanément la direction de sa vitesse pour rester dirigée vers la mouche poursuivie.

Établir l'équation du mouvement pour chaque mouche.

Indication : On se ramènera à la trajectoire d'une mouche, puis on pourra s'intéresser à l'angle formé par les vecteurs vitesse et position