

# Raisonner, rédiger

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Quantificateurs : “pour tout”, “il existe”</b>	<b>2</b>
1.1	Variables	2
1.2	“ Soit ”... “ tel que ”	3
1.3	Pour tout...	3
1.4	Il existe...	4
1.5	Il existe un unique...	5
1.6	On mélange	6
1.7	On prend la négation	6
<b>2</b>	<b>Résoudre une équation</b>	<b>7</b>
2.1	Qu’est-ce qu’une équation?	7
2.2	Résolution par équivalences	7
2.3	Résolution en deux temps ou l’analyse synthèse	8
<b>3</b>	<b>Et les ensembles !</b>	<b>8</b>
3.1	Notations	8
3.2	Montrer une inclusion ou une égalité d’ensembles	9
<b>4</b>	<b>Exemples de raisonnements classiques</b>	<b>11</b>
4.1	Démontrer une implication	11
4.1.1	Démonstration directe	11
4.1.2	Raisonnement par contraposition	11
4.2	Montrer une équivalence	12
4.2.1	Démontrer une équivalence par double implication	12
4.2.2	Démontrer une assertion en raisonnant par équivalence.	12
4.3	Raisonnement par disjonction de cas	13
4.4	Raisonnement par l’absurde	13
4.5	Raisonnements par récurrence	13
4.5.1	Récurrence simple	13
4.5.2	Récurrence double	14
4.5.3	Récurrence forte	15
4.6	Raisonnement par analyse synthèse	16

# 1 Quantificateurs : “pour tout”, “il existe”

## 1.1 Variables

Dans beaucoup d'énoncés mathématiques on utilise des variables, c'est à dire une lettre ou un caractère qui symbolise un élément d'un ensemble (ce peut être un ensemble de nombres, de fonctions ou d'autres objets mathématiques). Cela permet, par exemple, d'énoncer une propriété sur un nombre infinis d'éléments :

$$(1) \text{ « Tout couple de réels } (a, b) \text{ vérifie l'égalité : } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ »}$$

$$(1') \text{ « Soit } (a, b) \text{ un couple de réel on a l'égalité : } (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ »}$$

ou de dire si une égalité est vraie pour un certain élément d'un ensemble, sans nécessairement connaître explicitement le ou les éléments en question :

$$(2) \text{ « Il existe un couple de réels } (a, b) \text{ qui vérifie } (a + b)^2 = a^2 + b^2 \text{ »}$$

C'est René Descartes (1596–1650) qui, en reprenant une idée de François Viète (1540–1603), généralisa cette utilisation. Ce fût une révolution que l'on nomme l'algébrisation des mathématiques et cela permis de nombreuses avancées.

On dit souvent que les variables sont muettes, cela signifie que l'on peut remplacer la lettre ou le symbole par n'importe quel autre lettre ou symbole. Par exemple

$$\text{« Tout couple de réels } (x, y) \text{ vérifie l'égalité : } (x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \text{ »}$$

a le même sens mathématique que la phrase (1).

### Attention !

À chaque fois que vous utiliserez une nouvelle variable il faudra l'introduire, notamment en indiquant à quel ensemble elle appartient, à part bien sûr si la variable a été introduite dans l'énoncé.

Il y a essentiellement trois façons différentes d'introduire des variables, “ soit ”, “ pour tout ”, “ il existe ”. Il faut différencier “soit” des quantificateurs “pour tout” et “il existe”. Alors que le premier mot sert essentiellement dans les démonstrations (même s'il peut être utiliser pour des assertions) les deux quantificateurs servent pour écrire des énoncés mathématiques.

Dans les exemples précédents, si les énoncés portent sur un couple de réels, ils ont un sens très différent ! Alors que la première égalité est vraie pour tous les couples de réels quelqu'ils soient, la deuxième égalité est en générale fausse. Par contre la phrase reste vraie. Si l'on prend le couple  $(1, 0)$ , il vérifie bien  $(1 + 0)^2 = 1^2 + 0^2$ .

Deux symboles mathématiques ont été introduits au début du vingtième siècle par Bertrand Russel (1872–1970) et Gerhard Gentzen (1909-1945) pour signifier ces deux types de situations. Ce sont les quantificateurs universels (pour tout,  $\forall$ ) et existentiels (il existe,  $\exists$ ).

## 1.2 “ Soit ”... “ tel que ”

Dans les démonstrations (voire dans les énoncés) il est très utile d'introduire des objets mathématiques fixés (pour qu'on puisse faire des calculs sur eux) et quelconques pour qu'ils jouent le rôle de tous. On utilise alors l'adverbe “ soit ” dans le sens “ étant donné, supposons que ”. Il sera utilisé dans le même sens que dans la célèbre phrase de la genèse : “ Et dieu dit : Que la lumière soit ! Et la lumière fut ”

On n'oublira pas de noter l'ensemble auquel appartient l'objet qu'on introduit. Ainsi, si l'on veut démontrer l'assertion (1) on commencera par

(1) « Soit  $(a, b)$  un couple de réel... »

(1) « Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  »

Lorsque l'on veut que l'objet que l'on a introduit vérifie une propriété particulière on utilisera l'expression “ tel que ”. Ainsi si l'on veut introduire un entier naturel dont le carré est pair on écrira :

(1) « Soit  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $n^2$  est pair. »

• **Remarque :** En utilisant l'expression “Soit  $x \in E$ ” où  $E$  est un ensemble il faut bien faire attention à ce que l'ensemble  $E$  ne soit pas vide, sinon cette phrase ne veut rien dire!

## 1.3 Pour tout...

Le quantificateur “pour tout” interviendra souvent dans les assertions mathématiques, il signifie que la propriété énoncée est valable quelle que soit la valeur de la variable dans un ensemble donné (il faut bien sûr préciser qui est cette variable, et quel est l'ensemble des valeurs possibles).

### Exemple 1

Soit  $f$  une fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . On considère l'assertion suivante : « pour tout réel  $x$  tel que  $1 \leq x \leq 2$ , on a  $f(x) \geq 0$  ». Donner un exemple de fonction  $f$  pour laquelle cette assertion est vraie, puis un exemple pour lequel cette assertion est fausse.

Remarquer qu'ici, on a bien précisé une notation,  $x$ , et en même temps, on a précisé que  $x$  représentait un nombre réel, et que ce nombre réel était compris entre 1 et 2.

### Méthode.

Pour démontrer une assertion (une phrase mathématique) qui commence par :

Pour tout  $x \in E...$

on commencera la démonstration par :

« Soit  $x \in E ...$  »

En effet, de cette manière on fixe un élément de  $E$ , ce qui nous permet de pouvoir faire des opérations sur cet élément, mais il est quelconque, ce qui nous permet de ne pas perdre en généralité.

• **Notation** Lorsque l'on écrira des mathématiques de manière symbolique on pourra utiliser le signe  $\forall$  pour signifier “pour tout”.

**Attention !** Il ne s'agit pas d'une abréviation mais d'un symbole. Vous ne pouvez pas l'écrire au milieu d'une phrase écrite en français. Il ne doit être utilisé que dans une phrase écrite symboliquement.

### Exemple 2

Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x^2 - 6x + 9$  est positif.

## 1.4 Il existe...

Le quantificateur "il existe" intervient dans les assertions où l'on se demande s'il est possible de trouver un élément dans un ensemble donné (à préciser!), qui vérifie une certaine propriété (à préciser!).

### Exemple 3

On considère l'assertion suivante : « Dans la classe PCSI du Lycée Condorcet, il existe une ou un élève dont le prénom commence par la lettre A ». Cette assertion est-elle vraie ou fausse ?

Ici, l'ensemble considéré est l'ensemble des élèves de la classe de PCSI du Lycée Condorcet. La propriété considérée est celle d'avoir un prénom commençant par A.

### Exemple 4

— Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ . On considère l'assertion « il existe un réel  $x$  tel que  $f(x) > 3$  ». Donner un exemple de fonction  $f$  vérifiant cette assertion, puis un exemple ne vérifiant pas cette assertion.

— Trouver une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  qui ne vérifie pas la première assertion mais qui vérifie la deuxième :

« pour tout réel  $x$  tel que  $1 \leq x \leq 2$ , on a  $f(x) \geq 0$  »

« il existe un réel  $x$  tel que  $1 \leq x \leq 2$  et  $f(x) \geq 0$  »

### Méthode.

Pour démontrer le type de phrase :

Il existe  $x \in E$  tel que  $\mathcal{P}$

où  $\mathcal{P}$  est une propriété, on cherchera à trouver un élément de  $E$  vérifiant la propriété  $\mathcal{P}$ .

Il n'y a pas de moyen systématique de trouver un tel élément :

- parfois on peut le deviner,
- parfois on montre qu'il existe en appliquant un théorème qui indique l'existence d'un tel élément,
- ou encore on peut faire un raisonnement d'analyse synthèse (voir plus loin).

### • Notation

Lorsque l'on écrit des mathématiques de manière symbolique on pourra utiliser le signe  $\exists$  pour signifier "il existe".

**Attention!** Il ne s'agit pas d'une abréviation mais d'un symbole. Vous ne pouvez pas l'écrire au milieu d'une phrase écrite en français. Il ne doit être utilisé que dans une phrase écrite symboliquement.

### Exemple 5

Montrer qu'il existe  $x \in \mathbb{R}$  tel que  $x^2 \geq 3$  et  $\frac{1}{x} \leq 0,1$ .

## 1.5 Il existe un unique...

Il est parfois intéressant de vérifier s'il existe un ou plusieurs éléments d'un ensemble vérifiant une certaine propriété. Ainsi beaucoup d'énoncés commencent par : "Il existe un unique  $x \in E$ ..."

### Exemple 6

Il existe un unique réel  $x$  vérifiant l'égalité  $3x + 1 = 0$ .

### Exemple 7

Si  $a$  est un réel positif, il existe un unique réel positif  $b$  tel que  $b^2 = a$ .

Le fait que  $b$  soit unique permet alors de définir une application, la racine carrée. Sans l'unicité, il est impossible de définir cette application (c'est pourquoi on ne peut pas définir la fonction racine sur l'ensemble des complexes).

On voit ici que l'unicité d'un élément vérifiant une propriété peut jouer un rôle très important.

### Méthode.

Pour démontrer le type de phrase :

Il existe un unique  $x \in E$  tel que  $\mathcal{P}$

où  $\mathcal{P}$  est une propriété, il faut démontrer deux choses, la première est qu'il existe au moins un élément  $x$  de  $E$  qui vérifie  $\mathcal{P}$ , la deuxième est que cet élément est unique. Pour ce faire on peut :

- appliquer un théorème dont la conclusion est l'existence et l'unicité de l'élément cherché,
- introduire deux éléments quelconques  $x_1$  et  $x_2$  de  $E$  vérifiant tous les deux  $\mathcal{P}$  et montrer qu'ils sont égaux,
- résoudre une équation par équivalence,
- raisonner par analyse-synthèse. Ce raisonnement permet, le cas échéant, de démontrer l'existence et l'unicité d'un élément vérifiant une propriété.

### Exemple 8

- Dans quelques chapitres nous montrerons l'unicité de la fonction exponentielle.
- Montrons l'unicité du maximum d'une partie de  $\mathbb{R}$ .

### • Remarque

On peut démontrer l'unicité d'un objet vérifiant une certaine propriété sans avoir besoin d'en démontrer l'existence, pour cela il aura fallu supposer avant son existence!

### Exemple 9

Montrons l'unicité du nombre réel positif tel que son carré vaut  $-1$ .

Nous sommes bien d'accord, il n'existe pas de réel dont le carré vaut  $-1$ . Nous pouvons néanmoins démontrer l'unicité d'un tel nombre.

### • Notation

Lorsque l'on écrira des mathématiques de manière symbolique on pourra utiliser les signes  $\exists!$  pour signifier "il existe un unique".

**Attention!** Il ne s'agit pas d'une abréviation mais d'un symbole. Vous ne pouvez pas l'écrire au milieu d'une phrase écrite en français. Il ne doit être utilisé que dans une phrase écrite symboliquement.

### Exemple 10

Considérons les trois énoncés suivants. Dire, en justifiant, le ou lesquels sont vrais.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(2\pi x) = 0$ ,
2.  $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(2\pi x) = 0$ ,
3.  $\exists! x \in \mathbb{R}, \sin(2\pi x) = 0$

## 1.6 On mélange

Il est possible d'utiliser successivement plusieurs quantificateurs, à condition qu'ils concernent des variables différentes. Dans ce cas, il est important de choisir l'ordre dans lequel vous introduisez vos variables. Le sens peut alors être complètement différent.

### Exemple 11

L'un de ces énoncés est vrai, l'autre faux :

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z}, n \leq x$
2.  $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, n \leq x$ .

### Exemple 12

Écrire à l'aide des quantificateurs les assertions suivantes, et préciser si elles sont vraies ou fausses.

1. Le carré de tout nombre réel est positif ou nul
2. Certains nombres réels sont plus grands que leur carré
3. Tout entier naturel est strictement inférieur à au moins un réel positif.

### Exemple 13

Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . Écrire à l'aide des quantificateurs les expressions suivantes :

- |                               |                             |                              |                                       |
|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $f$ s'annule              | (2) $f$ est inférieur à $g$ | (3) $f$ est positive         | (4) $f$ n'est pas positive            |
| (5) $f$ est la fonction nulle | (6) $f$ est majorée par 5   | (7) $f$ est supérieure à $g$ | (8) $f$ est strictement décroissante. |

## 1.7 On prend la négation

En mathématiques, une phrase et sa négation ne peuvent pas être vraies en même temps. Encore faut-il savoir énoncer correctement la négation d'une phrase. Nous y reviendrons plus en détails par la suite.

### Méthode.

Si  $E$  est un ensemble et  $P$  une propriété sur les éléments de  $E$ .

La négation de la phrase

Pour tout  $x \in E$ ,  $x$  vérifie  $P$

est la phrase

Il existe  $x \in E$  qui ne vérifie pas  $P$

De même la négation de la phrase :

Il existe  $x$  vérifiant  $P$

est la phrase

Pour tout élément  $x$  de  $E$ ,  $x$  vérifie non  $P$ .

### Exemple 14

Écrire la négation des assertions des exemples 8 et 9.

## 2 Résoudre une équation

### 2.1 Qu'est-ce qu'une équation ?

C'est une égalité entre deux membres qui dépendent de variables. Ces variables peuvent représenter des objets mathématiques différents :

- L'équation

$$(E_1) \quad 3x = x + 1$$

peut être vue comme une équation sur  $\mathbb{R}$ , ou sur  $\mathbb{N}$ . Dans le cas où on cherche les solutions dans  $\mathbb{N}$  est une équation Diophantienne.

- L'équation

$$(E_2) \quad x = x + 1$$

peut être vue comme une équation sur  $\mathbb{R}$ .

- L'équation

$$(E_3) \quad x^2 + y^2 = 1$$

est à deux variables  $x$  et  $y$  : il s'agit d'une équation sur  $\mathbb{R}^2$ .

- L'équation

$$(E_4) \quad y'' + 4y = 0$$

est, cette fois, une équation dans  $\mathcal{D}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , l'ensemble des fonctions deux fois dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

On peut, bien sûr avoir d'autres types d'équations !

Résoudre une équation consiste à trouver s'il existe des objets mathématiques (selon le contexte réels, couples de réels, fonctions, ...) vérifiant l'égalité et le cas échéant tous les trouver.

Attention ! Trouver une solution ne suffit pas ! Si cette solution est unique il faut montrer que c'est la seule, sinon il faut trouver les autres solutions !

- Ainsi L'équation  $(E_1)$  vue comme équation dans  $\mathbb{R}$  admet une unique solution (mais il faut le montrer !) Alors que comme équation dans  $\mathbb{N}$  elle n'admet pas de solutions.
- L'équation  $(E_2)$  n'a pas de solution ! Dans ce cas  $x$  ne symbolise pas un nombre mais c'est une variable qui sert à poser la question : existe-t-il un réel  $x$  tel que la valeur reste inchangée en ajoutant 1 ?
- L'équation  $(E_3)$  admet une infinité de solutions ! Il faut les caractériser !
- L'équation  $(E_4)$  admet aussi une infinité de solutions ! Nous les déterminerons dans un chapitre ultérieur.

### 2.2 Résolution par équivalences

En raisonnant par équivalences on s'assure que deux lignes ont exactement les mêmes solutions.

#### Exemple 15

Pour résoudre l'équation  $(E_1)$  on a la suite d'équivalences : Soit  $x$  un réel :

$$\begin{aligned} x \text{ est solution de } (E_1) &\iff 3x = x + 1 \\ &\iff 2x = 1 \\ &\iff x = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

L'équation admet donc une unique solution dans  $\mathbb{R}$ , le nombre  $\frac{1}{2}$ . Par contre si on fixe  $x$  dans  $\mathbb{N}$  on arrive à une contradiction,  $(E_1)$  n'admet donc pas de solutions dans  $\mathbb{N}$ .

Il est important de noter que chaque équivalence peut être justifier par une proposition sur les réels !

La résolution est très simple mais le principe est d'établir la double implication :

$$\text{Si } x \text{ est solution de } (E_1) \text{ alors } x = 1$$

Attention cette phrase n'indique pas que 1 est solution !

Si  $x = 1$  alors  $x$  est solution de  $(E_1)$

Celle là parcontre oui !

## 2.3 Résolution en deux temps ou l'analyse synthèse

### Exemple 16

Résolution de l'équation  $(E_5)$

$$1 - 2x = |x|$$

Soit  $x$  un réel.

• si  $x$  vérifie  $(E_5)$  alors  $x$  vérifie

$$(1 - 2x)^2 = x^2$$

et donc il vérifie  $(1 - 3x)(1 - x) = 0$ .

Ainsi si  $x$  est solution alors  $x = 1$  ou  $x = \frac{1}{3}$ . Noter qu'il s'agit d'une implication et non d'une équivalence !

• Nous avons donc deux candidats, or

$$1 - \times 1 = -1 \neq |1| \text{ et } 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

Ainsi seul  $\frac{1}{3}$  est solution !

Il faut bien être conscient que l'on a uniquement l'implication

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, a = b \Rightarrow a^2 = b^2$$

Ce n'est pas une équivalence !

## 3 Et les ensembles !

La définition d'un ensemble en tant qu'objet mathématiques comme on peut définir une fonction, un matrice, un entier (en mathématique **tout** se définit) n'est pas au programme de PCSI mais nous allons bien sûr être amené à utiliser régulièrement des ensembles. Cette situation n'est pas rare non seulement quand on apprend les mathématiques (vous utilisez depuis très très longtemps les nombres entiers mais vous n'en avez jamais vu la définition) mais elle n'est pas rare en histoire des mathématiques.

### 3.1 Notations

Il y a deux façons de définir un ensemble, en **extension** ou en **compréhension**.

#### Définition 1.

Une manière de définir un ensemble est de donner tous les éléments de cet ensemble. On dit qu'on définit cet ensemble en **extension**.

### Exemple 17

— L'ensemble  $\{-12, 25, 102\}$  est l'ensemble contenant  $-12$ ,  $25$  et  $102$ . Dans cette notation avec accolades, l'ordre des éléments ne compte pas ; l'éventuelle répétition des éléments ne compte pas non plus. Ainsi :

$$\{-12, 25, 102\} = \{102, -12, 25\} = \{25, 102, -12\} = \{25, 25, -12, 102\} = \dots$$

— Un ensemble de la forme  $\{x\}$  s'appelle un singleton.

— Bien sûr on ne peut écrire en extension que des ensembles finis !



### Méthode.

Soit  $E$  un ensemble défini en extension.

Pour montrer qu'un élément  $x$  appartient à  $E$ , il faut montrer que c'est un des éléments de la liste des éléments de  $E$ .

### Définition 2.

Soit  $E$  un ensemble. On peut parfois décrire une partie de  $E$  comme l'ensemble des éléments de  $E$  qui vérifient une certaine propriété.

Supposons que  $\mathcal{P}$  soit une propriété susceptible d'être vérifiée par les éléments de  $E$ . Alors la notation

$$F = \{x \in E \mid x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$$

désigne l'ensemble des éléments de  $E$  vérifiant  $\mathcal{P}$ . On le note aussi  $\{x \in E, x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$ .

On dit que  $F$  est défini en **compréhension**.

### Exemple 18

L'ensemble  $\{x \mid \exists n \in \mathbb{N}, x = 2^n\}$  est l'ensemble des puissances de 2. On pourra l'écrire plus simplement  $\{2^n, n \in \mathbb{N}\}$ .

### Méthode.

Soit  $E$  un ensemble et  $F = \{x \in E, x \text{ vérifie } \mathcal{P}\}$  un ensemble défini en compréhension.

Pour montrer qu'un élément  $x \in E$  est un élément de  $F$ , il faudra vérifier que  $x$  satisfait la propriété  $\mathcal{P}$ .

### Exemple 19

Montrer que :

$$- 0 \in \{n \in \mathbb{R} \mid n = n^2\}.$$

$$- \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

### • Remarque.

Un même ensemble peut être défini en extension et en compréhension :

$$\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n = n^2\}$$

## 3.2 Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

Notons  $E$  et  $F$  deux ensembles.

### Méthode.

Pour montrer que  $E \subset F$ , il faut montrer que tout élément de  $E$  est un élément de  $F$ . Autrement dit en langage formel :

$$\forall x \in E \quad x \in F$$

On commencera le raisonnement par :

- **Soit**  $x \in E$  (On fixe un élément quelconque de  $E$ ).
- **Montrons que**  $x \in F$ . Puis on donne des arguments qui montrent que l'élément  $x$  est un élément de  $F$ .

### Exemple 20

1. Montrer que  $\{x \in \mathbb{R}, \exists y \geq 0, x \geq y\} \subset \mathbb{R}_+$ .
2. On note  $2\mathbb{N}$  l'ensemble des entiers naturels pairs et on pose  $E = \{k(k+1), k \in \mathbb{N}\}$ . Montrer que  $E \subset 2\mathbb{N}$ .

#### Méthode.

Pour montrer que  $E = F$ , on pourra montrer que  $E \subset F$  et  $F \subset E$  c'est un raisonnement par **double inclusion**.

On rédigera comme suit le raisonnement :

- Montrons que  $E \subset F$ .
  - Soit  $x \in E$ .
  - Montrons que  $x \in F$ .
  
- Réciproquement montrons que  $F \subset E$ .
  - Soit  $x \in F$ .
  - Montrons que  $x \in E$ .

### Exemple 21

Montrer que  $\{x \in \mathbb{R}, \forall y > 0, x \leq y\} = \mathbb{R}_-$

#### Méthode.

Pour montrer que  $E = F$  on pourra aussi raisonner par **équivalence**.

Le raisonnement se présentera alors de cette façon :

$$\text{Pour tout } x : x \in E \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x \in F$$

### Exemple 22

Montrer l'égalité d'ensembles :

$$\{0, 1\} = \{n \in \mathbb{R} \mid n = n^2\}$$

## 4 Exemples de raisonnements classiques

Chaque étape d'une démonstration, d'un calcul ou d'une résolution d'équations doit être justifiable par des propriétés, des propositions, des théorèmes soit démontrés dans le cours ou dans les années précédentes, soit admis. Bien sûr il n'est pas toujours nécessaire d'écrire toutes les justifications. Par exemple le passage entre ces deux égalités n'a pas besoin d'être justifié sur une copie

$$3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}$$

Par contre il faut être conscient que c'est la conséquence directe de la propriété :

$$\forall a \in \mathbb{R}^* \quad \forall (b, c) \in \mathbb{R}^2, \quad b = c \iff ab = ac$$

Et il est important d'avoir cette propriété en tête puisque dans le cas de l'équation à paramètre  $m \in \mathbb{R}$  :

$$mx = 1$$

la proposition précédente ne peut pas être utilisée puisque  $m$  n'est pas supposé non nul ! Une des hypothèses n'est pas vérifiée.

On voit que deux choses sont importantes ici. Prendre conscience que ce que vous trouvez naturel est en fait justifié par des propositions, théorèmes, ... et qu'il est essentiel de bien vérifier les hypothèses avant d'appliquer une propriété. Dans les cas où il est nécessaire de justifier, votre rédaction doit montrer au correcteur que vous avez vérifié les hypothèses. Si le théorème que vous utilisez porte un nom utilisez le. Sinon vous pourrez utiliser la formulation du type

Comme  $A$  est vraie alors  $B$  est vraie.

Par exemple si  $f$  est une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , la phrase :

Comme pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) \geq 0$  alors  $f$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

Utilise implicitement la proposition :

Une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$  de dérivée positive est croissante.

Le correcteur ayant le même corpus de propositions que vous il sait à quelle proposition vous faites référence.

### 4.1 Démontrer une implication

Une implication est une assertion mathématiques du type

Si  $A_1$  est vraie alors  $A_2$  est vraie.

Où  $A_1$  et  $A_2$  sont des assertions mathématiques. Symboliquement on le note

$$A_1 \Rightarrow A_2$$

Cela signifie que dès que  $A_1$  est réalisée alors nécessairement  $A_2$  est réalisée.

#### 4.1.1 Démonstration directe

Pour démontrer directement que  $A_1$  implique  $A_2$ , il faut supposer que  $A_1$  est vraie et en déduire par une série d'arguments justifiés ou justifiables que  $A_2$  est vraie.

#### Exemple 23

Soit  $n \in \mathbb{N}$ , montrons que si  $n$  est pair alors  $n^2$  est pair.

#### 4.1.2 Raisonnement par contraposition

##### Définition 3.

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont deux assertions alors la **contraposée** de " $A_1$  implique  $A_2$ " est l'assertion :

« (non  $A_2$ ) implique (non  $A_1$ ) »

### Exemple 24

Considérons l'assertion :

**Si j'ai le permis de conduire alors j'ai plus de 18 ans.**

Il s'agit d'une implication entre les assertions «J'ai le permis de conduire» et « J'ai plus de 18 ans». La langue française n'étant pas assez précise, il faudrait préciser qu'avoir plus de 18 ans signifie avoir un âge supérieur ou égal à 18 ans. La contraposée de cette phrase est :

**Si j'ai strictement moins de 18 ans alors je n'ai pas le permis de conduire.**

En France ces deux assertions sont vraies! Par contre aux Etats Unis elles toutes les deux fausses. On peut montrer le théorème suivant.

#### **Théorème 4.**

Si  $A_1$  et  $A_2$  sont des assertions, alors l'assertion «  $A_1$  implique  $A_2$  » et sa contraposée sont équivalentes.

Ce théorème signifie que si «  $A_1$  implique  $A_2$  » est vraie alors « (non  $A_2$ ) implique (non  $A_1$ ) » est vraie et que si « (non  $A_2$ ) implique (non  $A_1$ ) » est vraie alors «  $A_1$  implique  $A_2$  » est vraie. Ainsi pour démontrer une implication on peut démontrer sa contraposée.

### Exemple 25

Démontrons, par la contraposée, que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , si  $n^2$  est pair alors  $n$  est pair.

*Ici tout l'intérêt d'utiliser la contraposée est que la condition que l'on suppose vraie porte sur  $n$  et non sur  $n^2$ , on peut alors en déduire une expression de  $n^2$  en fonction d'entiers.*

*En effet si l'on essaie de démontrer directement cette assertion on arrive à une impasse. Supposons que  $n^2$  soit un entier pair alors il existe un entier  $k$  tel que  $n^2 = 2k$ . On obtient alors  $n = \sqrt{2k}$ , on ne peut alors rien en déduire sur la parité de  $n$ !*

## 4.2 Montrer une équivalence

### 4.2.1 Démontrer une équivalence par double implication

Soient  $P$  et  $Q$  deux assertions. On veut montrer un énoncé du type

“ $P$  est vraie si et seulement si  $Q$  est vraie” ou symboliquement  $P \iff Q$

Une équivalence  $P \iff Q$  est une double implication :  $P \iff Q$  signifie  $P \Rightarrow Q$  et  $Q \Rightarrow P$ . Pour montrer une équivalence vous pouvez donc montrer distinctement chacune des implications.

### 4.2.2 Démontrer une assertion en raisonnant par équivalence.

Pour démontrer l'assertion  $P$ , on peut démontrer l'équivalence  $P \iff Q$ , où  $Q$  est une assertion que l'on sait vraie. De la même façon, on peut prouver qu'une assertion est fausse en prouvant qu'elle est équivalente à une assertion fausse.

### Exemple 26

Démonstration de l'ingalinité triangulaire.

### 4.3 Raisonnement par disjonction de cas

Ce raisonnement consiste à examiner toutes les possibilités d'une situation donnée et à conclure dans chaque cas.

#### Exemple 27

Montrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$  l'entier  $n^3 - n$  est pair.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On observe que l'on a  $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n - 1)(n + 1)$ . Notons que  $n$  est soit pair soit impair.

Examinons ces deux cas :

- Si  $n$  est pair alors il existe  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2k$  et  $n^3 - n = 2k(n - 1)(n + 1)$  comme  $k(n - 1)(n + 1)$  est un entier  $n^3 - n$  est pair.
- Si  $n$  est impair, alors  $n + 1$  est pair donc il existe un entier  $l \in \mathbb{N}$  tel que  $n + 1 = 2l$  et donc  $n^3 - n = 2n(n - 1)l$  et comme  $n(n - 1)l$  est entier alors  $n^3 - n$  est pair.

On a bien montré dans chaque cas l'énoncé demandé.

**Exercice :** Montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le réel  $\frac{n(n+1)}{2}$  est un entier.

### 4.4 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde consiste à supposer que la conclusion que l'on cherche à démontrer est fausse, et à déduire de cette supposition une contradiction. Ainsi, on montre qu'il est impossible que la conclusion soit fausse; on en déduit que la conclusion est vraie.

La première trace de raisonnement par l'absurde remonte à Aristote (383–322 av JC). Mais l'exposition assez succincte de ce raisonnement laisse supposer qu'il était connu et utilisé avant.

L'intérêt de cette démarche est qu'elle donne une hypothèse supplémentaire : supposer la conclusion fausse signifie que l'on suppose que le contraire de la conclusion est vrai. Cela permet quelquefois d'aller un peu plus loin dans le raisonnement, et de mieux comprendre comment les choses fonctionnent.

#### Exemple 28

Montrons par l'absurde qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

*Notons tout d'abord que nous avons aussi utiliser aussi un raisonnement par disjonction de cas.*

*L'avantage du raisonnement par l'absurde dans ce cas est qu'on a pu supposer deux propriétés vraies :  $n$  pair et  $n$  impair. Alors que si nous avions voulu démontrer cette assertion sans utiliser le raisonnement par l'absurde, nous aurions dû montrer que si  $n$  est pair alors il ne peut pas être impair. Nous aurions dû supposer  $n$  seulement pair et démontré qu'il ne peut pas être impair. C'est à dire que pour tout  $k \in \mathbb{N}$   $n \neq 2k + 1$ . C'est une chose difficile à démontrer sans passer par un raisonnement par l'absurde.*

### 4.5 Raisonnements par récurrence

Même s'il semblerait que le raisonnement par récurrence ait été utilisé en Chine et en Inde avant, la première formalisation de ce raisonnement a été donnée par Pascal (1623–1663) pour une démonstration que nous verrons cette année.

#### 4.5.1 Récurrence simple

Supposons que pour chaque entier naturel  $n$ , on ait une assertion  $\mathcal{P}(n)$ . On cherche à montrer que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Méthode.

Dans certains cas, un raisonnement par récurrence permet de conclure. Le principe est le suivant, et se rédige en trois étapes :

1. *Initialisation.* On montre que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
2. *Hérédité.* On fixe un entier naturel  $n$ . On montre que **si**  $\mathcal{P}(n)$  est vraie, **alors**  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
3. On conclut : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

Pourquoi a-t-on le droit de conclure ainsi ? Nous ne ferons pas la démonstration précise ici, qui repose sur la construction des entiers naturels, mais nous pouvons comprendre le principe.

- Déjà, on a montré que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
- Pour montrer que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie, on utilise l'hérédité avec  $n = 0$ . L'hérédité nous dit que **si**  $\mathcal{P}(0)$  est vraie, **alors**  $\mathcal{P}(0+1)$  est vraie. Or nous venons de vérifier que  $\mathcal{P}(0)$  est, effectivement, vraie. On peut donc affirmer : d'après l'initialisation et l'hérédité, **comme**  $\mathcal{P}(0)$  est vraie,  $\mathcal{P}(1)$  est vraie.
- Pour l'étape suivante, on recommence. D'après l'hérédité (appliquée à  $n = 1$ ), **si**  $\mathcal{P}(1)$  est vraie, **alors**  $\mathcal{P}(2)$  est vraie. Or on vient de montrer que  $\mathcal{P}(1)$  est vraie, donc  $\mathcal{P}(2)$  est vraie.
- Ainsi de suite... On montre que  $\mathcal{P}(3)$  est vraie, puis que  $\mathcal{P}(4)$  est vraie, et on peut montrer de proche en proche que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . C'est ce qu'affirme le principe de récurrence ; on a le droit de l'utiliser tel quel.

### Remarques :

1. Le principe de récurrence est présenté ici comme une méthode. Il s'agit en fait d'un théorème qui se démontre à partir des propriétés de l'ensemble  $\mathbb{N}$ .
2. L'initialisation ne se fait pas toujours au rang 0. Si on démontre que la propriété  $\mathcal{P}(n_0)$  est vraie puis l'hérédité, on conclura que la propriété  $\mathcal{P}$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .
3. Le procédé de récurrence peut aussi permettre de définir un objet mathématique. Vous avez rencontré plusieurs fois ce type de définition, le plus simple étant les suites arithmétiques et géométriques.

### Exemple 29

Montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ .

### Exemple 30

Soit  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $q \neq 1$ . Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ .

### 4.5.2 Récurrence double

Pour comprendre l'intérêt de la récurrence double, considérons la suite de Fibonacci. Elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} F_0 = F_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases}$$

C'est une suite récurrente d'ordre 2. L'ordre 2 signifie que l'on se sert des deux termes précédents pour définir un terme de la suite. Si l'on veut montrer, par exemple, que les termes de la suite sont positifs il semble naturel, comme on l'a vu précédemment, d'utiliser le principe de récurrence. Mais si l'on utilise une récurrence simple, on ne va pas pouvoir démontrer l'hérédité. En effet si l'on suppose que  $F_n$  est positif on ne pourra rien en déduire sur  $F_{n+1}$  il faudrait pour cela avoir aussi une information sur  $F_{n-1}$ .

#### Méthode.

Le principe de récurrence double est le suivant, il se rédige aussi en trois étapes :

1. *Initialisation.* On montre que  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.
2. *Hérédité.* On fixe un entier naturel  $n$ . On montre que **si**  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  sont vraies, **alors**  $\mathcal{P}(n+2)$  est vraie.
3. On conclut : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

#### Exemple 31

Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie plus haut et démontrons que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n$  est positif. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $\mathcal{P}(n)$  l'assertion :

$$\mathcal{P}(n) : \quad F_n \geq 0$$

- (*Initialisation*) Par définition de la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on a  $F_0 = F_1 = 1 \geq 0$ , donc  $\mathcal{P}(0)$  et  $\mathcal{P}(1)$  sont vraies.
- (*Hérédité*) Soit  $n \in \mathbb{N}$ , supposons  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  vraies.  
Par définition de  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  on a  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ . Ainsi comme on a supposé  $F_n \geq 0$  et  $F_{n+1} \geq 0$ . Le réel  $F_{n+2}$  est la somme de deux réels positifs, il est donc positif.  
On a ainsi montré que si  $\mathcal{P}(n)$  et  $\mathcal{P}(n+1)$  étaient vraies alors  $\mathcal{P}(n+2)$  était vraie.
- (*Conclusion*) Ainsi d'après le principe de récurrence on a bien montré que  $\mathcal{P}(n)$  est vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Remarque :

Comme pour le principe de récurrence simple, si l'on montre que  $\mathcal{P}(n_0)$  et  $\mathcal{P}(n_0+1)$  sont vraies, puis l'hérédité, on pourra conclure que la propriété est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

On peut tout à fait généraliser ce procédé en une récurrence d'ordre 3, 4 etc.

#### 4.5.3 Récurrence forte

Enfin, parfois pour démontrer l'hérédité on aura besoin de supposer que la propriété  $\mathcal{P}$  est vraie pour tout entier plus petit que  $n$ . On utilisera alors le principe de récurrence forte.

#### Méthode.

Dans certains cas, un raisonnement par récurrence permet de conclure. Le principe est le suivant, et se rédige en trois étapes :

1. *Initialisation.* On montre que  $\mathcal{P}(0)$  est vraie.
2. *Hérédité.* On fixe un entier naturel  $n$ . On montre que **si** pour tout entier  $k$  tel que  $k \leq n$ ,  $\mathcal{P}(k)$  est vraie, **alors**  $\mathcal{P}(n+1)$  est vraie.
3. On conclut : pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vraie.

### Exemple 32

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite vérifiant :

$$\begin{cases} u_0 \text{ est un entier pair} \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k \end{cases} .$$

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est un entier pair.

On raisonne par récurrence. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\mathcal{P}(n) : u_n \in \mathbb{Z}$  et  $u_n$  est pair.

- Par hypothèse,  $u_0 \in \mathbb{Z}$ , et  $u_0$  est pair, donc  $\mathcal{P}(0)$  est vérifiée.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que, pour tout entier  $k$  tel que  $k \leq n$ ,  $\mathcal{P}(k)$  est vérifiée. Montrons qu'alors  $\mathcal{P}(n+1)$  est également vérifiée.

Par définition de la suite, on a  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k$ .

Or par hypothèse de récurrence,  $u_0, \dots, u_n$  sont des entiers pairs, autrement dit, il existe des entiers  $v_0, \dots, v_n$  tels que :  $\forall k \in \{0, \dots, n\}, u_k = 2v_k$ .

Alors  $u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k = 2 \sum_{k=0}^n v_k$ , et  $\sum_{k=0}^n v_k \in \mathbb{Z}$ , donc  $u_{n+1}$  est un entier pair. Comme  $u_0, \dots, u_n$  sont aussi des entiers pairs, on a montré  $\mathcal{P}(n+1)$ .

- Conclusion, on a montré par principe de récurrence forte que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{P}(n)$  est vérifiée, et donc que

Question bonus : donner, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  et  $u_0$ .

## 4.6 Raisonnement par analyse synthèse

C'est un raisonnement utilisé pour caractériser simplement l'ensemble des éléments vérifiant une certaine propriété, par exemple résoudre une équation. Ce raisonnement est aussi souvent utilisé pour démontrer l'existence et l'unicité de certains éléments vérifiant une propriété donnée.

### Méthode.

Le raisonnement se fait en deux temps.

- Dans un premier temps (*l'analyse*), on suppose donné un élément vérifiant la propriété, puis on procède par implications successives afin de réduire le possible le nombre de cas à étudier.
- Dans un second temps (*la synthèse*), on teste les candidats obtenus et on écarte éventuellement ceux qui ne conviennent pas.



### Exemple 33

Déterminons les solutions réelles de l'équation  $\sqrt{x+6} = x$ .

Procédons par analyse synthèse.

**Analyse** : Soit  $x$  une solution de l'équation (*On suppose ici que l'équation admet une solution, alors qu'on ne sait pas si c'est vrai*). En passant au carré on obtient  $x+6 = x^2$  (*On a utilisé l'implication  $a = b \Rightarrow a^2 = b^2$ , c'est une implication pas une équivalence*). C'est à dire  $x^2 - x - 6 = 0$ . C'est un trinôme de discriminant  $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25$ . il admet donc deux solutions réels  $\frac{1-\sqrt{25}}{2} = -2$  et  $\frac{1+\sqrt{25}}{2} = 3$ . On a donc deux candidats  $-2$  et  $3$  (*Nous venons de démontrer que si  $x$  est solution alors nécessairement  $x = -2$  ou  $x = 3$* ).

**Synthèse** : Testons les candidats obtenus :  $-2$  ne convient pas étant donné qu'on a  $\sqrt{-2+6} = 2 \neq -2$ . Par contre  $3$  convient car on a bien  $\sqrt{3+6} = 3$ .

**Conclusion** L'équation a une unique solution  $x = 3$ .

### Exemple 34

Déterminons les fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in \mathbb{R}, \quad f(x+y) = x + f(y).$$

**Analyse** : Supposons qu'il existe une fonction  $f$  qui satisfait la contrainte. Alors, en particulier, pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = x + f(0)$ . On voit donc que  $f$  est une fonction  $f : x \mapsto x + c$ , avec  $c \in \mathbb{R}$ .

**Synthèse** : Soit  $f$  une fonction affine de pente 1, c'est à dire qu'il existe un réel  $c$  tel que  $f : x \mapsto x + c$ . Montrons que  $f$  satisfait la contrainte. Soient  $x$  et  $y$  deux réels.

$$f(x+y) = (x+y) + c = x + (y+c) = x + f(y)$$

**Conclusion** : les fonctions solutions du problème (de l'équation fonctionnelle) sont exactement les fonctions affines de pente 1, c'est à dire les fonctions du type  $x \mapsto x + c$  où  $c$  est une constante réelle.

L'analyse permet de réduire les candidats solutions de l'équation. Et l'on vérifie pendant la synthèse que les candidats restant sont ou non solutions.

Un avantage (mais cela peut aussi être une difficulté) est que pendant l'analyse c'est un raisonnement par implications et non par équivalences qui est demandé.