Lycée Condorcet PCSI

Septembre 2023

Calculs agébriques

Table des matières

Dans ce chapitre nous définirons proprement les signes somme $\sum$ et produit $\prod$ et nous en démontrerons les principales propriétés et règles d'usages.
Nous y verrons aussi une définition possibles des coefficients binomiaux ainsi que la formule de Newton.

1 Sommes et produits

1.1 Sommes

1.1.1 Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Nous pouvons définir informellement le signe $\sum$ comme suit :

Si a_1, a_2, …, a_n sont des réels alors $\sum_{i=0}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.
Si l'on veut définir plus correctement ce signe il faut utiliser une définition par récurrence.

Définition 1.

Étant donnés une suite de réels $(a_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \quad \text{est défini pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ par} \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{0} a_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) + a_{n+1} \end{cases}$$

Plus généralement, si I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexés par I, $\sum_{i \in I} a_i$ est la somme de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$. Cette notation n'est pas ambigüe car l'addition est commutative dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1

1. $\sum_{l=1}^{6} l =$
2. $\sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i+1} =$
3. $\sum_{k \in [\![2,5]\!]} \ln(k) =$
4. Soit $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=1}^{10} k =$
5. $3 + 5 + 7 + 9 + 11 =$
5. $1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 =$

• **Remarque :** L'indice de sommation est une lettre muette ainsi $\sum_{i=1}^{8} a_i = \sum_{k=1}^{8} a_k$

Proposition 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels. On a alors les égalités :

1. $\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$.
2. $\sum_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$.

Attention ! Il est très tentant de penser que la somme se comporte de la même façon avec le produit ! C'est à dire de penser que, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ sont des réels alors les deux réels :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \times b_k \text{ et } \sum_{k=1}^{n} a_k \times \sum_{k=1}^{n} b_k$$

sont égales. C'est **FAUX !!!**.

Proposition 3 (Relation de Chasles)**.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p < n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels. On a alors :
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_k + \sum_{k=p+1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_k$.
Plus généralement si J est un ensemble fini si $J = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$ alors
$\displaystyle\sum_{k\in J} a_k = \sum_{k\in I_1} a_k + \sum_{k\in I_2} a_k$.

Exemple 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} 2k + \sum_{k=0}^{n}(2k+1) = \sum_{k=1}^{2n+1} k$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \max(k,n)$.

Méthode (Changement d'indice)**.**

Nous avons vu que l'indice de la somme est une variable muette (on peut changer la lettre sans changer la somme). Parfois il sera utile de changer l'indice de sommation, la plupart du temps pour simplifier la somme.
Soient l, p, et n trois entiers et a_{p+l}, a_{p+1+l}, ..., a_{n+l}, $n-p$ réels. Alors on a l'égalité :
$$\sum_{k=p}^{n} a_{k+l} = \sum_{k\in[\![p,n]\!]} a_{k+l} = \sum_{j\in[\![p+l,n+l]\!]} a_j = \sum_{j=p+l}^{n+l} a_j$$
On dira qu'on a effectué le changement d'indice $j = k + l$.
De même, si $p \leq n$, on peut aussi inverser l'ordre des termes de la somme, en posant $j = n - k$:
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{j=0}^{n-p} a_{n-j}$$

Exemple 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
2. Simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}$

On peut généraliser la simplification que l'on a obtenu dans le premier exemple. On appelle ce type de sommes, sommes télescopiques.

Proposition 4 (Télescopage)**.**

Soient n et m deux entiers tels que $m \leq n$ et soient a_m, a_{m+1}, ..., a_{n+1} des réels. On appelle somme télescopique toute somme du type suivant : $\displaystyle\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k)$ et on a le résultat :

$$\sum_{k=m}^{n}(a_{k+1}-a_k) = a_{n+1}-a_m$$

Exemple 4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

1. Calculer $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 - k^2$
2. Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$.

1.1.2 Sommes usuelles

La légende veut que l'instituteur du futur mathématicien Carl Friedrich Gauss (1777–1855) dont nous étudierons beaucoup de résultats, lui donna, comme punition, le calcul de la somme des cent premiers entiers naturels. Gauss aurait alors trouver très rapidement la solution en intuitant la deuxième formule de cette proposition.

Proposition 5.

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$.

1. Somme d'une constante $a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} a = (n-p+1)a = (\text{nb de termes}) \times a$.
2. Somme arithmétique : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.
3. Somme des carrés : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
4. Somme géométrique de raison $q \neq 1$. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Proposition 6 (Factorisation de $a^n - b^n$ par $a-b$)**.**

Soient a et b deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k.$$

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Factoriser $a^2 - b^2$, $a^3 - b^3$ et $a^4 - b^4$.

1.2 Produits

Le produit $\prod$ se définit de la même façon que la somme $\sum$, les propriétés sont elles différentes puisque les propriétés de l'addition et du produit ne sont pas les mêmes.
Ainsi on peut définir informellement le produit comme suit :
Si a_1, a_2, ..., a_n sont des réels alors $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \times a_2 \times \ldots \times a_n$.
Et comme la somme, la défintion exacte nécessite l'utilisation de la récurrence.

Définition 7.

Étant donnés des réels a_1, a_2, ..., a_n :

$$\prod_{i=1}^{n} a_i \quad \text{est défini par} \quad \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{0} a_i = 1 \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{n+1} a_i = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right) \times a_{n+1} \end{cases}$$

Plus généralement, si I est un sous-ensemble fini de $\mathbb{N}$ et $(a_i)_{i \in I}$ une famille de réels indexés par I, $\displaystyle\prod_{i \in I} a_i$ est le produit de tous les éléments de la famille $(a_i)_{i \in I}$. Cette notation n'est pas ambigue car la multiplication est commutative dans $\mathbb{R}$.

Définition 8.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $n!$ l'entier défini par :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times \ldots \times n$$

L'entier $n!$ s'appelle factoriel n. Par convention on notera $0! = 1$.

Exemple 5

Calculer les nombres suivants : $3!$, $5!$, $\dfrac{10!}{(2!) \times (8!)}$

Proposition 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des nombres réels. On a alors les égalités :

1. $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$.
2. $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

Proposition 10 (Relation de Chasles).

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \leq n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des nombres réels. On a alors :

$$\prod_{k=1}^{p} a_k \times \prod_{k=p+1}^{n} a_k = \prod_{k=1}^{n} a_k$$

Corollaire 11.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$n! = n \times (n-1)!$$

1.3 Sommes doubles

Définition 12.

Soient I et J deux ensembles finis non vides et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres réels ou complexes. On note $\displaystyle\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j}$ la somme des éléments de la famille $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$.

Théorème 13 (somme double indéxée par un rectangle).

Soient m, n, p et q des entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille de nombres complexes indéxée par un rectangle. C'est à dire telle que $I = [\![m, n]\!]$ et $J = [\![p, q]\!]$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=p}^{q} a_{i,j} = \sum_{j=p}^{q}\sum_{i=m}^{n} a_{i,j}$$

Théorème 14 (Somme double indéxée par un triangle).

Soient m et n deux entiers et $(a_{i,j})_{(i,j)\in A}$ une famille de complexes indéxée par un triangle c'est à dire telle que $A = \{(i,j), m \leq i \leq j \leq n\}$ alors :

$$\sum_{m\leq i\leq j\leq n} a_{i,j} = \sum_{i=m}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{j=m}^{n}\sum_{i=m}^{j} a_{i,j}$$

Exemple 6

Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$.

Attention, les bornes de la deuxième somme peuvent dépendre de l'indice de la première somme. Par exemple :

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}$$

Mais l'inverse n'arrive **jamais** ou alors on fait une erreur.

Théorème 15.

Soient $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ et $(b_j)_{1\leq j\leq p}$ deux familles de nombres complexes. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \times \sum_{j=1}^{p} b_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_i b_j = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_i b_j$$

2 Coefficients binomiaux et formule du binôme.

2.1 Coefficients binômiaux

Définition 16.

Soient deux entiers $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{Z}$. Le coefficient binômial “p parmi n”, noté $\binom{n}{p}$ est défini par :

$$\begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \in [\![0, n]\!] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans ce chapitre nous choisirons un point de vu algébrique : autant la définition que les démonstrations utilisent le langage algébrique (c'est à dire les propriétés des nombres) mais il existe un point de vu combinatoire (la combinatoire est l'art de compter les choses). Ce point de vu sera abordé plus tard dans l'année.
Noter qu'à ce stade il n'est pas évident que les coefficients binômiaux soient des entiers !

Proposition 17 (Symétrie)**.**

Soient n et p deux entiers naturels. On a

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Proposition 18 (Binômiale sans nom)**.**

Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On a

$$\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$$

Proposition 19 (Formule de Pascal)**.**

Soient n et p deux entiers naturels. On a

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Cette formule est très utile car elle donne une relation de récurrence sur les coefficients binomiaux. cela permet tout d'abord de calculer rapidement les premiers coefficients. Mais ce sera aussi très utile dans les démonstrations. Notamment on peut maintenant montrer que les coefficients binomiaux sont des entiers !

Corollaire 20.

Un coefficient binomial est un entier.

2.2 Formule de binôme de Newton

Nous allons maintenant voir une généralisation démontrée par Newton de la formule bien connue :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

La généralisation porte sur l'exposant.

Proposition 21 (Formule du binôme de Newton)**.**

Soient a et b deux complexes, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Exemple 7

Soit $n \in \mathbb{N}$, simplifier les sommes $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \pi^k$.