Lycée Condorcet Septembre 2024
PCSI

Calculs algébriques

1 Sommes

Exercice 1.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 5^k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k.k!$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k 2^{k+1}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k-1)$
6. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$

Exercice 2.

1. Montrer qu'il existe deux réels $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que : $\quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{\alpha}{k} + \dfrac{\beta}{k+1}$
2. En déduire une simplification de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
3. Appliquer une méthode similaire pour simplifier les sommes $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$. On écrira pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{1}{k^2-1}$ et $\dfrac{1}{k(k+1)(k+2)}$ respectivement sous la forme $\dfrac{\alpha}{k+1}+\dfrac{\beta}{k-1}$ et $\dfrac{\alpha'}{k}+\dfrac{\beta'}{k+1}+\dfrac{\gamma'}{k+2}$ où α, β, α', β' et γ' sont des réels à trouver.

Exercice 3.
En séparant les termes avec indices pairs et impairs, simplifier la somme :

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$$

Exercice 4.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geq \frac{n}{2}$$

En déduire la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$.

Exercice 5.
Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

2 Produits

Exercice 6.
Calculer $\sum_{k=1}^{n} e^k$ et $\prod_{k=1}^{n} e^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7.
Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+2}$.

Exercice 8.
Montrer par deux méthodes différentes (avec et sans récurrence) que : $\forall n \in \mathbb{N}, \prod_{k=0}^{n}(2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Exercice 9.
Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$, simplifier les produits suivants : $P_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k$, $R_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$

3 Sommes doubles

Exercice 10.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

1. $U_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} \max(i,j)$.
2. $V_n = \sum_{1 \leq i,j \leq n} ij$
3. $W_n = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} |i-j|$
4. $X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} i$
5. $Y_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} ij$

Exercice 11.
Soit n un entier naturel. On considère la somme double $S_n = \sum_{k=0}^{n}\sum_{j=k}^{n} 2^j$.

1. Vérifier que $S_n = n2^{n+1} + 1$.
2. Démontrer que $S_n = \sum_{j=0}^{n}(j+1)2^j$.
3. En déduire que $\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1} = (n-1)2^n + 1$.
4. Déterminer alors la valeur de la somme double $T_n = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{i+1} k2^{k-1}$.

4 Coefficients binomiaux

Exercice 12.

Calculer les sommes suivantes :

a) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) $S_1 = \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

c) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$

d) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$

Exercice 13.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant $(1+1)^n$ et $(1-1)^n$, calculer les sommes $\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$ et $\sum_{\substack{0\leq k\leq n \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$.

Exercice 14.

Montrer par récurrence (*sur n ou p ?*) que pour tout $p \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq p$: $\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$

Exercice 15.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k}$.

1. En effectuant le changement d'indice $j = 2n+1-k$, déterminer une autre expression de S_n.
2. En déduire la valeur de $2S_n$, puis celle de S_n.

5 Petits problèmes

Exercice 16. Soit $n \in \mathbb{N}$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$(k+1)^2 - k^2 = 2k+1.$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1) = (n+1)^2$$

   (c) Retourver la valeur de $\sum_{k=0}^{n} k$.

2. (a) Montrer que, pour tout entier naturel k,

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

   (b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n}(3k^2+3k+1) = (n+1)^3$$

   (c) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

3. (a) Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}(4k^3+6k^2+4k+1) = (n+1)^4$$

(b) En déduire que

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Exercice 17.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$.
   (a) Donner une expression sans le signe somme de cette fonction.
   (b) Justifier la dérivabilité de f et dériver les deux expressions de f
   (c) En déduire l'expression de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k2^k$.
2. Retrouver le résultat en calculant de deux manière différente la somme $\displaystyle\sum_{0 \leq i < j \leq n} 2^j$.
3. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 3^k$.

Exercice 18.
Soit $n \geq 1$, et f_n la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^k}{n}.$$

1. Donner, pour tout réel x, une expression de $f_n(x)$ sans le symbole $\sum$.
2. Dériver f_n sous ses deux formes pour calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}$
3. Retrouver le résultat de la question précédente sans utiliser la fonction f_n et en utilisant les propriétés des coefficients binomiaux.
4. Calculer, pour $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n} \binom{n}{k}$. On pourra écrire $k^2 = k(k-1) + k$.