Lycée Condorcet
PCSI

Septembre 2024

Partie de $\mathbb{R}$ (1/2)

Table des matières

1 Inégalités et opérations réelles

Définition 1.

Soient a et b deux réels.

— On dit que a est **inférieur** à b (et on le note $a \leq b$) pour exprimer que le réel $a - b$ appartient à l'ensemble $\mathbb{R}_-$. On dira aussi que b est supérieur à a.

— On dit que a est **strictement inférieur** à b (et on le note $a < b$) pour exprimer que $a \neq b$ et que $a \leq b$ c'est à dire que $a - b$ appartient à l'ensemble $\mathbb{R}_-^*$. On dira aussi que b est strictement supérieur à a.

De cette définition on déduit les propriétés suivantes :

Proposition 2.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, x \leq x$ (réflexivité)
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad (x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)
4. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x \leq y$ ou $y \leq x$ (ordre total).

Voici les opérations compatibles avec les inégalités :

- On peut **sommer** des inégalités membre à membre,

Proposition 3.

Si a, b c et d sont trois réels tels que $a \leq b$ et $c \leq d$ alors :
$$a + c \leq b + d$$

- On peut multiplier une inégalité par un nombre **à condition** de connaître le signe de ce nombre.

Proposition 4.

Soient a, b et c trois réels tels que $a \leq b$.

— Si $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.

— Si $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$.

- On peut multiplier des inégalités membre à membre à condition que tous les termes soient positifs.

Proposition 5.

Si a, b c d sont quatre réels tels que $0 \leq a \leq b$, $0 \leq c \leq d$ alors
$$0 \leq ac \leq bd$$

- Pour l'inverse on a cette propriété.

Proposition 6.

Soient a et b sont deux réels non nuls tels que $a \leq b$.

— Si $0 < a$, alors $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

— Si $b < 0$, alors $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{a}$.

— Si $a < 0 < b$, alors $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{b}$.

- Si une proposition n'est pas dans le cours c'est a priori qu'elle n'est pas vraie ! Beaucoup de résultats vont vous sembler évidents ou naturels ce n'est pas pour autant qu'ils sont vrais !
  Par exemple on ne "soustrait" pas les inégalités !
  Plus précisément si $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ tels que $a \leq b$ et $c \leq d$ en général $a - c$ n'est **PAS** plus petit que $b - d$.

Exercice 1.

1. Démontrer que pour tout $x \in [1; 2]$ on a les inégalités : $4 \leq x^2 + x + 2 \leq 8$ et $1 \leq x^2 - x + 2 \leq 5$.
2. Déterminer, de même, un encadrement de $f(x) = x^2 + x + 2$ sur $]-1; 2[$.
3. Déterminer un encadrement de $g(x) = \dfrac{3x + 4}{x - 4}$ sur $[1; 2]$

2 Valeur absolue

Définition 7.

Soit x un réel, on définit la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, comme :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Exemple 2

- $|5| = 5$ car 5 est positif et $|-2| = -(-2) = 2$ car -2 est négatif.
- On a $|x - 2| = \begin{cases} x - 2 & \text{si } x \geq 2 \\ -x + 2 & \text{si } x < 2 \end{cases}$

•Graphe de l'application valeur absolue et graphe de l'application $x \mapsto |f(x)|$ où f est une fonction réelle.

Propriétés 8.

1. Si x et y sont deux réels quelconques on a :
$$|x| = |y| \iff x = y \text{ ou } x = -y$$
2. Soient x et y deux réels et n un entier. Alors :
$$|-x| = |x| \text{ (parité)}, \quad |x \times y| = |x| \times |y|, \quad |x^n| = |x|^n$$

3 Inégalité et valeur absolue

Proposition 9.

Pour tout réel x et pour tout réel positif a, on a :
$$\begin{array}{ccc} & -|x| \leq x \leq |x| & \\ |x| \leq a & \iff & -a \leq x \leq a \\ |x| \geq a & \iff & x \leq -a \ \text{ ou } \ x \geq a \end{array}$$

Cette proposition sera utile pour résoudre des inéquation mais elle va aussi nous permettre de démontrer l'inégalité triangulaire.

Proposition 10 (Inégalité triangulaire)**.**

Soient x et y deux réels, on a les inégalités :
$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{ et } \quad \big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

4 Intervalles de $\mathbb{R}$

Dans un chapitre ultérieur nous définierons les intervalles de $\mathbb{R}$ comme des ensembles "sans trous", pour l'instant nous nous contenterons d'énumérer tous les ensembles qui sont de intervalles.

Définition 11.

Soit I une partie de $\mathbb{R}$. On dit que I est un **intervalle** dans les quatres cas suivants :

- si $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ et $I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x < b\}$
  On note alors $I =]a, b[$;
- si $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ et $I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x < b\}$
  On note alors $I = [a, b[$;
- si $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ et $I = \{x \in \mathbb{R},\ a < x \leq b\}$
  On note alors $I =]a, b]$;
- si $(a,b) \in (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}) \times (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ et $I = \{x \in \mathbb{R},\ a \leq x \leq b\}$
  On note alors $I = [a, b]$;

Proposition 12 (Invervalles et valeur absolue).

Soient a un réel et r un réel strictement positif. Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a les équivalences :

— $|x-a| \leq r$ est équivalent à $x \in [a-r, a+r]$.

— $|x-a| \geq r$ est équivalent à $x \in]-\infty, a-r]$ ou $x \in [a+r, +\infty[$.

Interprétation géométrique : La valeur absolue d'un réel représente sa distance à 0. Si a et x sont deux réels, $|x-a|$ est la **distance** de a à x. Si $r \geq 0$, l'inégalité $|x-a| \leq r$ signifie que x est à une distance inférieur ou égale à r de a.

5 Majorant, minorant d'une partie de $\mathbb{R}$

Soit E un ensemble. On appelle **partie** de E un ensemble contenant uniquement des éléments de E. Par exemple $\{1, 3, 5\}$ est une partie de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. L'ensemble des entiers set une partie de $\mathbb{R}$.

Définition 13.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

1. On dit que A est **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A,\ x \leq M$.
   Dans ce cas, on dit que M est un **majorant** de A.
2. On dit que A est **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que : $\forall x \in A,\ m \leq x$.
   Dans ce cas, on dit que m est un **minorant** de A.
3. On dit que A est **bornée** si A est à la fois majorée et minorée.

Exemple 3

1. L'intervalle $I = [\pi, +\infty[$ est minoré mais pas majoré.
2. L'intervalle $J =]-\infty, 2[$ est majoré mais pas minoré.
3. Soit $A = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Comme ci-dessus cet ensemble est borné.
4. Soit $B = \{\cos(n) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Cet ensemble est majoré, minoré, il est donc borné.

•**Remarque**. S'il existe, un majorant (resp. un minorant) n'est pas unique.

Proposition 14.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.

$$A \text{ est bornée} \iff \exists B \in \mathbb{R}_+, \forall x \in A \quad |x| \leq B$$

Autrement dit "être borné équivaut à être majoré en valeur absolue".

Définition 15.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On dit que a est un **plus grand élément** (ou : un **maximum**) pour A si $a \in A$ et si $\forall x \in A,\ x \leq a$.
2. On dit que a est un **plus petit élément** (ou : un **minimum**) pour A si $a \in A$ et si $\forall x \in A,\ a \leq x$.

Proposition 16.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Si A admet un plus grand (resp. un plus petit) élément alors cet élément est unique.

• **Remarque**. Le plus grand élément de A, quand il existe, est noté $\max A$.
Le plus petit élément de A, quand il existe, est noté $\min A$.

Exemple 4

1. L'intevalle I admet un plus petit élément : $\min I = \pi$, mais il n'admet pas de plus grand élément.
2. L'intervalle J n'admet ni de plus grand élément, ni plus petit élément.
3. L'ensemble A admet un plus grand élément $\max I = 1$ mais n'admet pas de plus petit élément.
4. L'ensemble B admet un plus grand élément $\max I = 1$ mais n'admet pas de plus petit élément.

• **Remarque**. L'ensemble J n'admet pas de plus grand élément pourtant le réel 2 est un majorant particulier de l'ensemble. C'est le plus petit majorant de J. De même 0 est le plus grand minorant de l'ensemble A.

6 Partie entière d'un réel.

Proposition 17.

Toute partie non vide de $\mathbb{Z}$ majorée admet un maximum.

Nous admettrons cette propriété. Elle permet entre autre de donner une définition de la partie entière.

Définition 18.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathcal{D}_x$ l'ensemble des entiers inférieur ou égal à x. Cet ensemble est une partie de $\mathbb{Z}$ non vide et majorée par x, il admet donc un plus grand élément. On l'appelle la partie entière de x et on la note $\lfloor x \rfloor$.

On a alors la caractérisation de la partie entière :

Proposition 19.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Les trois assertions suivantes sont équivalentes.

1. $n = \lfloor x \rfloor$.
2. $n \leq x < n + 1$.
3. $x - 1 < n \leq x$.

Démonstration : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $n \in \mathbb{Z}$.
L'entier n est la partie entière de x si et seulement si n le plus grand entier plus petit que x. Or n est le plus grand entier vérifiant "<être inférieur à x"> si et seulement si le successeur de n, $n+1$ ne vérifie pas cette propriété. Ainsi on a bien l'équivalence :

$$n = \lfloor x \rfloor \iff n \leq x < n + 1$$

Par ailleurs on a les équivalences

$$n \leq x < n + 1 \iff n \leq x \text{ et } x < n + 1 \iff n \leq x \text{ et } x - 1 < n \iff x - 1 < n \leq x$$

D'où le résultat cherché. ■