Lycée Condorcet
PCSI

À rendre le 23 septembre

Formule d'inversion de Pascal

Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ des des réels tels que

$$\forall p \in \{0, \ldots, n\},\ a_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k$$

Le but de ce problème est de montrer qu'on a alors

$$\boxed{\forall p \in \{0, \ldots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k}$$

C'est la **formule d'inversion de Pascal**.
On voit aussi ici une application de cette formule.

Démonstration de la formule d'inversion.

1. Montrer qu'on a, pour tout entier $\ell \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$.
2. (a) Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $k \leq q \leq p$, on a $\displaystyle\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.
   (b) En déduire, pour tout entier p et tout entier $k < p$, on a $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$.
   (c) Que vaut $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k}$ pour $k = p$?
3. *Démonstration de la formule d'inversion*
   (a) Justifier qu'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{k=0}^{p} \sum_{i=0}^{k} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i$.
   (b) Réécrire l'égalité précédente à l'aide une intervertion de sommes.
   (c) Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal donnée dans l'introduction du problème.

Application

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} (k+1) 2^k \binom{p}{k}$.