TD MATHS

cex 07
Big Math

EXERCICE 12 : Soit $n \in \mathbb{N}$,

d) $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k}$ $\times \frac{n+1}{n+1}$

Or pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a :

$$\frac{n+1}{k+1} \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1} \quad \text{(binôme sans nom)}$$

D'où, $S_3 = \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$

On procède à un changement d'indice : $j = k+1$

$$S_3 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} 1^j 1^{n+1-j}$$

D'où, $S_3 = \frac{1}{n+1} \left[\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} 1^j 1^{n+1-j} - 1 \right]$

Ainsi d'après le binôme de Newton on a :

EXERCICE 15 : Notons que si l'on pose $j = 2n+1-k$ on a les équivalences :

$$0 \leq k \leq n \iff -n \leq -k \leq 0$$
$$\iff n+1 \leq 2n+1-k \leq 2n+1$$

Ainsi on a l'égalité :

$$S_n = \sum_{k \in [\![0,n]\!]} \binom{2n+1}{k} = \sum_{j \in [\![n+1, 2n+1]\!]} \binom{2n+1}{2n+1-j}$$

Mais notons que pour tout $j \in [\![n+1, 2n+1]\!]$

On a, $\binom{2n+1}{2n+1-j} = \binom{2n+1}{j}$

Ainsi, $S_n = \sum_{j=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{j}$

2) D'après la Q précédente on a :

$$2 S_n = S_n + S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{k} + \sum_{k=n+1}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k}$$

D'après la relation de Chasles.

D'où d'après le binôme de Newton on a :

$$2 S_n = 2^{2n+1}$$

Ainsi on a : $\boxed{S_n = 2^{2n}}$

EXERCICE 18 :

1) Soit $x \in \mathbb{R}$, on a d'après la formule de Newton

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \frac{1}{n}(1+x)^n$$

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{f_n(x) = \frac{1}{n}(1+x)^n}$

2) L'application f_n est dérivable car elle est polynomiale, et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x)' = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} \cdot (1^{k-n-1}) ??$$

$\to 0 \to$ constante et dérivée c'est 0.

de même on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x)' = (1+x)^{n-1}$$

On a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1} = (1+x)^{n-1}$$

On a, en particulier, pour $x = 1$,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$

Ainsi on a, $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k}$