Exercice 12

c) Soit $n \in \mathbb{N}$

Notons que pour tout $n \in [\![0;n]\!]$

on a $\quad k^2 = k(k-1) + k$

D'où $$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \left[k(k-1) + k\right]\binom{n}{k}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (k-1)k\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$$

Mais on a pour tout $k \in [\![1;n]\!]$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

D'où $$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = 0 + \sum_{k=1}^{n} n(k-1)\binom{n-1}{k-1} + 0 + \sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1}$$

Dans la $2^{\text{ème}}$ somme on pose
$j = k-1$

Notons par ailleurs que pour $k \in [\![2;n]\!]$ on a :

$$(k-1)\binom{n-1}{k-1} = (n-1)\binom{n-2}{k-2}$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k} = 0 + n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}1^j 1^{n-1-j}$$

On procède au changement d'indice $j=k-2$ dans la première somme et dans la deuxième on applique la formule du binôme.

$$S_3 = n(n+1)\sum_{j=0}^{n-2}\binom{n-2}{j}1^j 1^{n-2-j} + n(n+1)^{n-1}$$

Ainsi d'après la formule du binôme on a :

$$S_3 = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1}$$

D'où $\boxed{S_3 = 2^{n-2} n (n+1)}$

Exercice 13

Notons

$$P_n = \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k}$$

et $I_n = \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$

D'après la relation de Chasles on a :

$$P_n + I_n = \sum_{k \in [\![0;n]\!]} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Ainsi, d'après la formule du binôme

$$P_n + I_n = (1+1)^n = 2^n$$

Par ailleurs, on a d'après la formule du binôme on a :

$$(1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \, 1^{n-k}$$

Mais d'après la relation de Chasles on a

$$(1-1)^n = \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$= \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ pair}}} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k \in [\![0;n]\!] \\ k \text{ impair}}} \binom{n}{k}$$

$$= P_n - I_n$$

On a ainsi

$$\begin{cases} P_n + I_n = 2^n \\ P_n - I_n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_n + I_n = 2^n \\ 2P_n = 2^n \end{cases}$$

$L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I_n = 2^n - 2^{n-1} \\ P_n = 2^{n-1} \end{cases}$$

On a ainsi

$$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1} \quad \text{et} \quad \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n-1}$$