Lycée Condorcet
PCSI

Septembre 2024

Propriétés de $\mathbb{R}$

1 Inégalités et valeurs absolues

Exercice 1.
Montrer que pour tous nombres réels a et b on a,

$$-2ab \leq a^2 + b^2, \quad 2ab \leq a^2 + b^2$$

Exercice 2.
Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\max(x, y) = \frac{x + y + |x - y|}{2} \quad \text{et} \quad \min(x, y) = \frac{x + y - |x - y|}{2}$$

Exercice 3.
Montrer que, pour tout couple de réels (x, y) :

$$|x| + |y| \leq |x + y| + |x - y|$$

$$1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$$

Commencer par montrer que : $xy - 1 = x - 1 + y - 1 + (x - 1)(y - 1)$.

Exercice 4.

1. Montrer que, pour tout couple de réels (x, y) strictement positifs, on a
$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$
2. En déduire que, pour tout triplet (a, b, c) de réels positifs on a :
$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \geq \frac{3}{2}$$

Exercice 5.
Résoudre les équations et inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x - 3| = 1/2$
2. $|x - 3| = |x + 1|$
3. $|2x - 11| < |x - 5|$.
4. $|x^2 + x + 1| = |3x - 1|$.

2 Partie entière

Exercice 6.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + 1 \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1$.

Exercice 7.
Soit $n \geq 1$ un entier.

1. Montrer que $2n \leq 2\sqrt{n(n + 1)} < 2n + 1$.
2. En déduire la valeur de $\left\lfloor \left(\sqrt{n} + \sqrt{n + 1} \right)^2 \right\rfloor$.

Exercice 8.
Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que :
$$\lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor \leq \lfloor a+b \rfloor \leq \lfloor a \rfloor + \lfloor b \rfloor + 1$$

Exercice 9.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que
$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$