Lycée Condorcet — Septembre 2024
PCSI

Fonctions réelles

1 Composition, monotonie, parité, dérivation

Exercice 1.

1. Montrer que la fonction $g(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ est paire.
2. Montrer que la fonction $f(x) = \ln\left|\dfrac{x+1}{x-1}\right|$ est impaire.
3. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
   En déduire que la fonction $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ est impaire sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Déterminer la monotonie des fonctions suivantes (on proposera plusieurs méthodes) :

$$f(x) = e^{\frac{1}{1-x}} \text{ sur }]1, +\infty[\ , \quad g(x) = \sqrt{x^2+x+1}\ , \quad h(x) = \sqrt{x} \times \ln(x^2+1)$$

Exercice 3. Étudier le domaine de définition, de dérivabilité et calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto \frac{x}{x^2-3x+2} \quad f_2 : x \mapsto (\cos x)^3 \quad f_3 : x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1+x^2}} \quad f_4 : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{2-x}}$$

$$f_5 : x \mapsto (x+2)e^{3x} \quad f_6 : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+x+1}} \quad f_7 : x \mapsto \ln(x^2+1) \quad f_8 : x \mapsto \sin\left(\ln\left(\frac{e^{2x}+1}{e^{2x}+3}\right)\right)$$

Exercice 4. Montrer que toute fonction définie sur $\mathbb{R}$ est la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire. *On pourra raisonner par analyse synthèse*

Exercice 5. Considérons f une fonction bijective d'un intervalle I dans un intervalle J et f^{-1} sa réciproque.

1. Montrer que si f est strictement croissante (respectivement décroissante) alors la fonction f^{-1} est strictement croissante (respectivement décroissante).
2. Montrer que si f est impaire alors f^{-1} est impaire.
   Que peut-on dire d'analogue si f est paire ?

2 Étude de fonctions

Exercice 6.

1. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\qquad \ln(1+x) \leq x$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\qquad e^x \geq 1 + x$.

Exercice 7. Étudier l'application $x \mapsto \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.
Est-elle bornée ? Possède t-elle des extrema sur son ensemble de définition ?

Exercice 8.

1. Montrer, grâce au théorème de la bijection, que la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^3-1}$ est bijective sur un intervalle à déterminer.
2. Retrouver le résultat de la précédente question et déterminer une expression explicite de f^{-1} en résolvant l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x \in [1, +\infty[$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\ln(x)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de f.

2. Montrer qu'il existe une fonction g et une seule, définie sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right[$ telle que, pour tout point x de cet intervalle, $g(x)\ln(g(x))=x$.
3. Dresser le tableau de variations complet de g, puis tracer sur un même graphique, les courbes de f et de g.

Exercice 10. On considère la fonction numérique de la variable réelle définie sur $[0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1-x}$. On note $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f relativement à un repère orthonormal.

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$, puis lorsque x tend vers 1 par valeur supérieures et valeurs inférieures. Que peut-on en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
2. Montrer que f est croissante sur chacun des intervalles $[0,1[$, $]1,+\infty[$.
3. Préciser l'équation cartésienne de la la tangente au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 0.
4. Montrer que l'équation $f(x)=-2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+\setminus\{1\}$.

Exercice 11. On considère la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de f et étudier sa parité.
2. Étudier les variations de la fonction f et préciser ses limites aux bornes de $\mathcal{D}$.
3. Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[0,+\infty[$ admet une application réciproque/ On note g cette application.
4. Donner l'ensemble de définition de g, son ensemble de continuité ainsi que son sens de variation.
5. Expliciter la fonction g.

3 Fonctions hyperboliques

Exercice 12. Pour tout x, $y\in\mathbb{R}$, montrer que

1. $\mathrm{sh}(x+y)=\mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}(y)$.
2. $\mathrm{ch}(x+y)=\mathrm{ch}(x)\mathrm{ch}(y)+\mathrm{sh}(x)\mathrm{sh}(y)$.
3. pour tout $x\geq 0$: $\mathrm{ch}(x)\geq 1+\frac{x^2}{2}$

Exercice 13.

1. (a) Justifier que la fonction $f:x\mapsto\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ est défine sur $\mathbb{R}$.
   (b) Expliciter les fonctions $\mathrm{sh}\circ f$ et $f\circ\mathrm{sh}$. Qu'en déduit-on ?
2. Montrer que l'équation (E) : $\mathrm{ch}(x)=y$ est équivalente à l'équation $e^{2x}-2ye^x+1=0$.
3. En déduire, pour $y\geq 1$ fixé, les solutions x de (E).
4. Qu'en déduisez vous sur ch ?

Exercice 14.

1. Exprimer, pour tout $a\in\mathbb{R}$, $\mathrm{sh}(2a)$ en fonction de $\mathrm{sh}a$ et $\mathrm{ch}a$.
2. En déduire une expression simplifiée du produit $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2^k}\right)$.

Exercice 15.
Faire une étude complète de $f:x\mapsto\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$. Que vaut $f(x)$ et $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ quand ces expressions sont définies ?

4 Fonctions circulaires

4.1 Utilisation des formules de trigonométrie

Exercice 16.

1. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

2. Calculer $\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\sin\dfrac{\pi}{8}$.

Exercice 17. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$: $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$

Exercice 18. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note α_n le réel défini par : $\alpha_n = \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}$
où l'expression contient $n-1$ symbole $\sqrt{\cdot}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, $2\cos\dfrac{\pi}{2^n} = \alpha_n$

Exercice 19. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ simplifier la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{\pi}{2^k}\sin\frac{3\pi}{2^k}$, puis déterminer son signe.

4.2 Étude de fonctions

Exercice 20.
On note $I = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ et , pour tout $x \in I$, $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$

1. Montrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle à déterminer.
2. Expliciter l'application réciproque de f.

Exercice 21.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.
2. Montrer que pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}x$.

Exercice 22. On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\right|\right)$.
Quel est le domaine de définition de f ? La fonction est-elle paire ? impaire ? périodique ?

Exercice 23. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos 3x \cos^3 x$.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, exprimer $f(-x)$ et $f(x+\pi)$ en fonction de $f(x)$. Sur quel intervalle I peut-on se contenter d'étudier f ?
2. Vérifier que f est dérivable et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $-\sin(4x)$, et en déduire le sens de variation de f sur I.

Exercice 24. On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\sin x}{2+\cos x}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. Justifier que f est dérivable sur son ensemble de définition.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $f(x+2\pi)$ et $f(-x)$. Que peut-on en déduire sur la courbe représentative de f ? En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$.
3. Montrer que, pour tout réel x, on a $f'(x) = \dfrac{1+2\cos x}{(2+\cos x)^2}$.
4. Étudier le signe de $1 + 2\cos x$ sur $[0, \pi]$.
5. Établir le tableau de variations de f sur $[0, \pi]$.

Exercice 25. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(x) + \cos(\alpha x)$. On veut démontrer que f est périodique si et seulement si $\alpha \in \mathbb{Q}$.

1. On suppose que $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$. Montrer que f est périodique.
2. On suppose que $\alpha \notin \mathbb{Q}$. Résoudre l'équation $f(x) = 2$. En déduire que f n'est pas périodique.

5 fonctions circulaires réciproques

Exercice 26.

1. Simplifier : a) $\arccos\cos\dfrac{8\pi}{3}$ b) $\arcsin\sin\dfrac{17\pi}{6}$ c) $\arctan\tan\left(-\dfrac{11\pi}{4}\right)$
   d) $\arcsin\cos\dfrac{7\pi}{4}$ e) $\arccos\sin\dfrac{17\pi}{5}$

2. Tracer le graphe des fonctions : a) $x \mapsto \arctan \tan x$ b) $x \mapsto \arccos \cos x$ c) $x \mapsto \arcsin \sin x$

Exercice 27. Donner l'ensemble de définition de ces expressions et les simplifier.

$$\tan(\arcsin x), \qquad \sin(\arccos x), \qquad \cos(\arctan x)$$

Exercice 28. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$1) \qquad \arccos(x) = \frac{\pi}{6}, \qquad 2) \qquad \arctan(x/2) = \pi, \qquad 3) \qquad \arcsin(x) = \arccos x$$

Exercice 29. Le but de l'exercice est de montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$ tel que $xy < 1$:

$$\arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \arctan x + \arctan y$$

1. Soit $(t, t') \in \mathcal{D}_{\tan}^2$ l'ensemble de définition de tangente, montrer que $t + t' \notin \mathcal{D}_{\tan}$ si et seulement si $\tan t \tan t' = 1$.
2. Soient x et y deux réels. Notons $t = \arctan x$ et $t' = \arctan y$.
   (a) Montrer que l'on a l'équivalence : $\quad 1 - xy > 0 \iff t + t' \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
   (b) En utilisant le changement de variables ci-dessus montrer l'égalité cherchée.

   montrer l'égalité cherchée.

Exercice 30. Étudier l'ensemble de définition et la dérivabilité des fonctions suivantes. Le cas échéant calculer leur dérivée.

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{1+x}{1-x}\right); \qquad g(x) = \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$$

Exercice 31. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [-1, 1]$, on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos x)$ et $g_n(x) = \dfrac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que f_n et g_n sont des fonctions polynomiales.