Lycée Condorcet
PCSI

À rendre le 10 octobre

Formule d'inversion de Pascal

La première partie du problème a pour objectif de démontrer la formule d'inversion de Pascal : si $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ sont des réels tels que

$$\forall p \in \{0, \ldots, n\},\ a_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k$$

alors on a

$$\boxed{\forall p \in \{0, \ldots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k}$$

La deuxième est une application de la formule.

Démonstration de la formule d'inversion.

1. **Montrer qu'on a, pour tout entier $\ell \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$.**
2. (a) **Montrer que, pour tous entiers k, q et p tels que $k \leq q \leq p$, on a $\displaystyle\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.**

   (b) **En déduire, pour tout entier p et tout entier $k < p$, on a $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$.**

   (c) **Que vaut $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k}$ pour $k = p$?**
3. *Démonstration de la formule d'inversion*

   (a) **Justifier qu'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k} (-1)^{p-k} \binom{p}{k}\binom{k}{i} b_i$.**

   (b) **Réécrire l'égalité précédente à l'aide une intervertion de sommes.**

   (c) **Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal donnée dans l'introduction du problème.**

Application

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} (k+1) 2^k \binom{p}{k}$.

Quelques systèmes

1. **Soit $n \in \mathbb{N}$. On cherche à résoudre des systèmes linéaires à $(n+1)$ inconnues notées x_0, x_1, …, x_n.**

   (a) **Résoudre** $\left\{\begin{array}{ccccccccccc} \binom{0}{0}x_0 & + & \binom{0}{1}x_1 & + & \binom{0}{2}x_2 & + & \cdots & + & \binom{0}{n}x_n & = & 1 \\ \binom{1}{0}x_0 & + & \binom{1}{1}x_1 & + & \binom{1}{2}x_2 & + & \cdots & + & \binom{1}{n}x_n & = & 4 \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ \binom{p}{0}x_0 & + & \binom{p}{1}x_1 & + & \binom{p}{2}x_2 & + & \cdots & + & \binom{p}{n}x_n & = & (p+1)2^p \\ & \vdots & & & & & & & & & \\ \binom{n}{0}x_0 & + & \binom{n}{1}x_1 & + & \binom{n}{2}x_2 & + & \cdots & + & \binom{n}{n}x_n & = & (n+1)2^n. \end{array}\right.$

(b) Résoudre

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
\left(\binom{n+1}{1}-\binom{0}{1}\right)x_0 & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{k+1}-\binom{0}{k+1}\right)x_k & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{n+1}-\binom{0}{n+1}\right)x_n & = & n2^{n+1}+1 \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\left(\binom{n+1}{1}-\binom{p}{1}\right)x_0 & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{k+1}-\binom{p}{k+1}\right)x_k & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{n+1}-\binom{p}{n+1}\right)x_n & = & n2^{n+1}-(p-1) \\
\vdots & & & & & & & & & & \\
\left(\binom{n+1}{1}-\binom{n}{1}\right)x_0 & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{k+1}-\binom{n}{k+1}\right)x_k & + & \cdots & + & \left(\binom{n+1}{n+1}-\binom{n}{n+1}\right)x_n & = & (n+1)2^n.
\end{array}\right.$$

Indication : on pourra enlever à chaque ligne (sauf la dernière) la ligne suivante.

Correction :

1. Soit ℓ un entier supérieur à 1. On reconnaît :

$$\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i\binom{\ell}{i} = \sum_{i=0}^{\ell}\binom{\ell}{i}(-1)^i 1^{\ell-i}$$

Ainsi d'après le binôme de Newton on a :

$$\boxed{\sum_{i=0}^{\ell}(-1)^i\binom{\ell}{i} = (1-1)^\ell = 0}$$

2. (a) Soient k, q et p entiers tels que $k \leq q \leq p$.
On a $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \frac{p!}{q!(p-q)!}\frac{q!}{k!(q-k)!} = \frac{p!}{(p-q)!k!(q-k)!} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{(p-q)!(q-k)!}$,
donc $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!}\frac{(p-k)!}{\big((p-k)-(q-k)\big)!(q-k)!} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.

(b) Soit p entier et $k < p$.
Par la question précédente, on a, pour tout entier q tel que $k \leq q \leq p$, $\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$.
Ainsi : $\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k} = \binom{p}{k}\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p-k}{q-k}$ et donc, par changement d'indice (le nouveau q correspond à l'ancien $q-k$), on obtient :
$$\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\sum_{q=0}^{p-k}(-1)^{q+k}\binom{p-k}{q} = (-1)^k\binom{p}{k}\sum_{q=0}^{p-k}(-1)^q\binom{p-k}{q} = (-1)^k\binom{p}{k}\times 0 = 0.$$

(c) Pour $k=p$, on a $\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \sum_{q=p}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k} = (-1)^p\binom{p}{p}\binom{p}{p} = (-1)^p$.

3. (a) Soit $p \in \{1,\dots,n\}$.
On sait par l'énoncé qu'on a, pour tout $k \in \{1,\dots,p\}$, $a_k = \sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}b_i$. Ainsi :
$$\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\sum_{i=1}^{k}\binom{k}{i}b_i = \sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i.$$

(b) En intervertissant les sommes on obtient pour $p \in \{1,\dots,n\}$, $\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=i}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i$

(c) Pour $p \in \{1, \dots, n\}$, on a, par ce qui précède,
$\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=i}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{i=1}^{p}(-1)^{p}b_i\sum_{k=i}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}$.
Or, par la question **??**, on a $\displaystyle\sum_{k=i}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}\binom{k}{i} = 0$ pour $i \in \{k, \dots, p-1\}$ et, par la question **??**, on a $\displaystyle\sum_{k=i}^{p}(-1)^{k}\binom{p}{k}\binom{k}{i} = (-1)^p$ pour $i = p$.
On en déduit : $\displaystyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = (-1)^p b_p (-1)^p = b_p$.
Ceci étant démontré pour tout $p \in \{1, \dots, n\}$, on a bien établi la formule d'inversion de Pascal.

1. Notons cette somme S_p. On a :

$$\begin{aligned}
S_p &= \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}(k+1)2^k\tbinom{p}{k} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}2^k\tbinom{p}{k} + \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}k2^k\tbinom{p}{k}\right) && \text{par linéarité} \\
&= \left((2-1)^p + \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}k2^k\tbinom{p}{k}\right) && \text{(binôme de Newton)} \\
&= \left(1^p + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}k2^k\tbinom{p}{k}\right) && \text{(le premier terme de la somme est nul)} \\
&= \left(1 + \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}p2^k\tbinom{p-1}{k-1}\right) && \text{(formule binômiale sans nom)} \\
&= \left(1 + 2p\sum_{k=1}^{p}(-1)^{(p-1)-(k-1)}2^{k-1}\tbinom{p-1}{k-1}\right) && \text{par linéarité} \\
&= \left(1 + 2p(2-1)^{p-1}\right) && \text{(binôme de Newton)} \\
&= 2p+1
\end{aligned}$$

Autre méthode : pour $x \in \mathbb{R}$ on note $f(x) = (x-1)^p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}x^k\binom{p}{k}$ d'après le binôme de Newton et $g(x) = xf(x)$. Comme c'est un polynôme, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour $x \in \mathbb{R}$ on a $g'(x) = f(x) + xf'(x)$, ie $g'(x) = (x-1)^p + px(x-1)^{p-1}$. Mais par ailleurs on a $g(x) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}x^{k+1}\binom{p}{k}$ et donc on a $g'(x) = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}(k+1)x^k\binom{p}{k}$. Donc pour tout réel x on a $\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}(k+1)x^k\binom{p}{k} = (x-1)^p + px(x-1)^{p-1}$ et en évaluant en $x = 2$ on obtient $S_p = (2-1)^p + p \times 2 \times (2-1)^{p-1} = 2p+1$.

1. Le système est triangulaire mais avec la formule d'inversion de Pascal on évitera tout calcul supplémentaire. En effet notons, pour $0 \leq p \leq n$, $b_p = x_p$ et $a_p = (p+1)2^p$. Le système se reformule en $\displaystyle\forall p \in \{0, \dots, n\},\ a_p = \sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}b_k$ donc par inversion de Pascal $\displaystyle\forall p \in \{0, \dots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k$, ie $\displaystyle\forall p \in \{0, \dots, n\},\ x_p = \sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}(k+1)2^{k+1} = 2p+1$ d'après la question précédente.

2. Notons L_0, L_1, ..., L_n les lignes de ce système.

Tout d'abord avec la formule de Pascal (pas l'inversion, celle du triangle), on observe que la ligne L_n est la même que celle du système précédente.

Par ailleurs, pour $p < n$, l'opération élémentaire $L_p \leftarrow L_p - L_{p+1}$ transforme L_p en la $p^{\text{ième}}$ ligne du système précédent. En effet, le coefficient de x_k dans $L_p - L_{p+1}$ est (avec la formule de Pascal du triangle)

$$\left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{p}{k+1}\right) - \left(\binom{n+1}{k+1} - \binom{p+1}{k+1}\right) = \binom{p+1}{k+1} - \binom{p}{k+1} = \binom{p}{k}$$

et le second membre de $L_p - L_{p+1}$ est

$$\left(n2^{n+1} - (p-1)2^p\right) - \left(n2^{n+1} - p2^{p+1}\right) = p2^{p+1} - (p-1)2^p = \big(2p - (p-1)\big)2^p = (p+1)2^p$$

L'ensemble des solutions est donc le même : $\forall p \in \{0, \dots, n\},\ x_p = 2p + 1$.