Propriétés de $\mathbb{R}$

1 Propriétés de $\mathbb{R}$.

Exercice 9
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

Correction :
Par définition de la partie entière d'un réel on a :

$$\lfloor nx \rfloor \leq nx$$

Mais n est positif d'où

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x$$

Mais la défintion de la partie entière nous donne encore :

$$x < \lfloor x \rfloor + 1$$

D'où par transitivité :

$$\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$$

Par ailleurs, toujours par definition de la partie entière et comme n est positif, on a

$$n\lfloor x \rfloor \leq nx$$

Ainsi $n\lfloor x \rfloor$ est un entier plus petit que nx il est donc plus petit que le plus grand des entiers plus petit que nx on a donc :

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor$$

et en multipmiant cette ingalité par $\frac{1}{n}$ qui est positif

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$$

D'où la double inégalité :

$$\lfloor x \rfloor \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} < \lfloor x \rfloor + 1$$

L'entier $\lfloor x \rfloor$ est donc le plus grand entier plus petit que $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. On a ainsi

$$\boxed{\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$$