Lycée Condorcet
PCSI

Septembre 2024

Fonctions circulaires

Table des matières

1 Sinus et cosinus **1**
- 1.1 Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique . . . 1
- 1.2 Formules de trigonométrie . . . 3

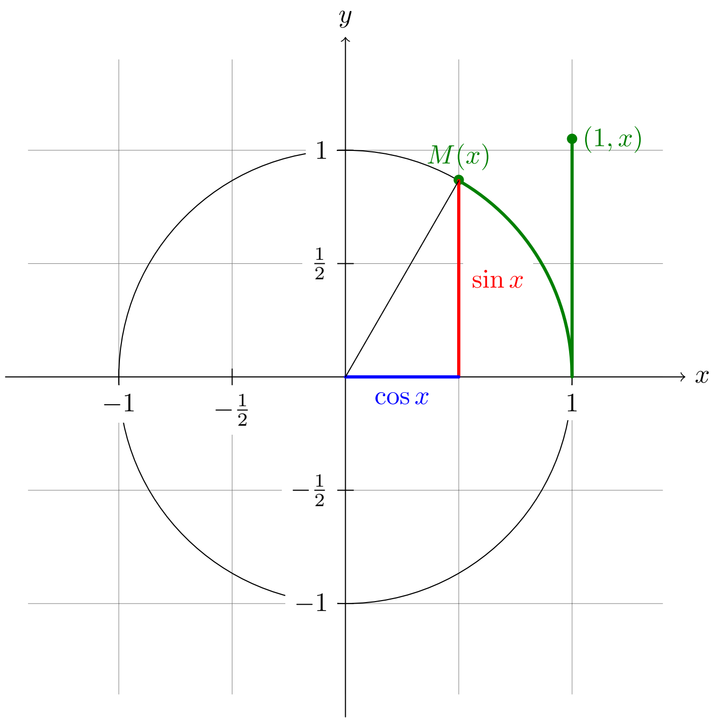
2 Fonctions sinus, cosinus et tangente **5**
- 2.1 Étude des fonctions sinus et cosinus . . . 5
- 2.2 Fonction tangente . . . 6

3 Fonctions réciproques **8**

1 Sinus et cosinus

1.1 Enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique

Pour donner la définition du cosinus et du sinus d'un réel nous passons par l'enroulement de la droite réelle sur le cercle trigonométrique (le cercle de centre $(0,0)$ et de rayon 1).
On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation $x = 1$ et I le point de coordonnées $(1,0)$. Dans un premier temps à tout réel x on associe un point de la droite d'équation $x = 1$, le point $(1,x)$. De cette manière on identifie la droite réelle à $\mathcal{D}$ (il s'agit en fait d'une bijection, nous reviendrons bientôt à cette notion). Puis si x est positif on associe le point du cercle $M(x)$ tel que l'arc de cercle en sens trigonométrique IM soit de longueur x, si x est négatif on considère l'arc de cercle en sens anti-trigonométrique de longueur x.



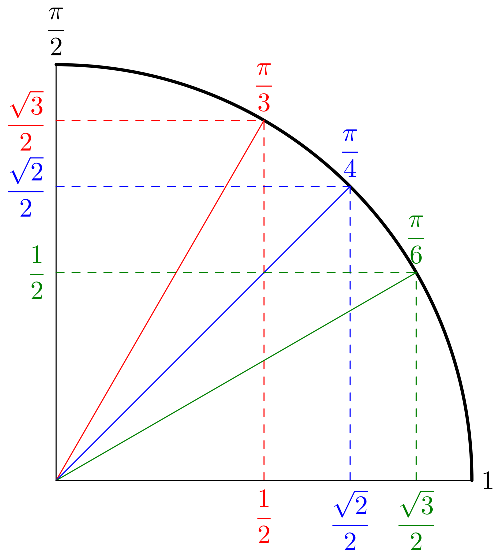
Notez que si x est plus grand que 2π il est nécessaire de faire plus d'un tour...

Définition 1.

Soit x un réel.
Le sinus de x est l'ordonnée de $M(x)$ et le cosinus est son abscisse. Ils sont respectivement noté $\sin x$ et $\cos x$.

Voici quelques valeurs particulières du sinus et du cosinus :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



Exercice 1. Démontrer ces résultats.

Notons que par défnition du cercle trigonométrique on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$-1 \leq \sin x \leq 1, \qquad -1 \leq \cos x \leq 1$$

Ce qui est équivalent à

$$|\sin x| \leq 1, \qquad |\cos x| \leq 1$$

Le théorème de Pythagore donne immédiatement la propriété suivante :

Proposition 2.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Soit x un réel, comme le périmètre du cercle trigonométrique est égal à 2π les points $M(x)$ et $M(x+2\pi)$ sont égaux et des donc

Proposition 3.

Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$\sin(x) = \sin(x+2\pi) \quad \text{et} \quad \cos(x) = \cos(x+2\pi)$$

Définition 4.

Soit x, y et α trois réels.
On dit que x est congru à y modulo α, s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$x = y + k\alpha$$

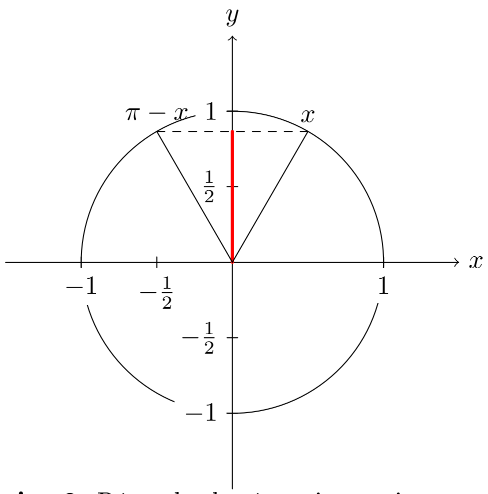
Et on note

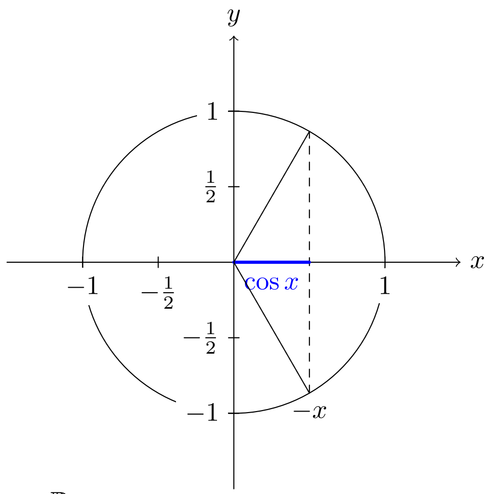
$$x \equiv y \quad [\alpha]$$

Proposition 5.

Soit x et y deux réels on a les équivalences :

$$\sin x = \sin y \iff \left[\begin{array}{c} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - y \quad [2\pi] \end{array}\right. \quad \text{et} \quad \cos x = \cos y \iff \left[\begin{array}{c} x \equiv y \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -y \quad [2\pi] \end{array}\right.$$





Exercice 2. Résoudre les équations suivantes, de variable $x \in \mathbb{R}$:

a) $\cos x = \dfrac{1}{2}$

b) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$

c) $2\cos(2x) = \sqrt{3}$

d) $2\cos^2(2x) - 3\cos(2x) = -1$

e) $\cos(2x) = \cos x$

f) $\sin(2x) + \sin x = 0$

g) $\sin(2x) + \sin\left(\frac{\pi}{3} + 3x\right) = 0$

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes : a) $\cos x > 0$ b) $\sin x \leq \frac{1}{2}$

1.2 Formules de trigonométrie

Proposition 6.

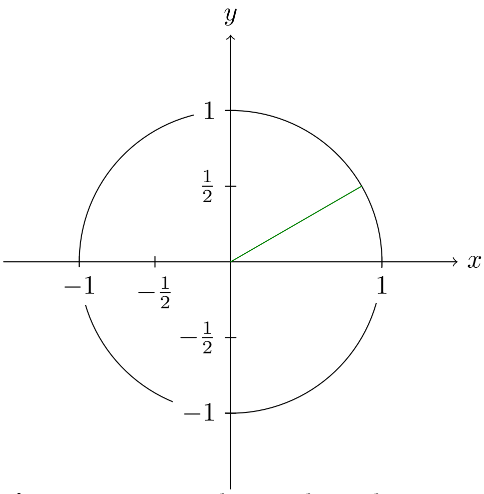
Pour tout réel x,

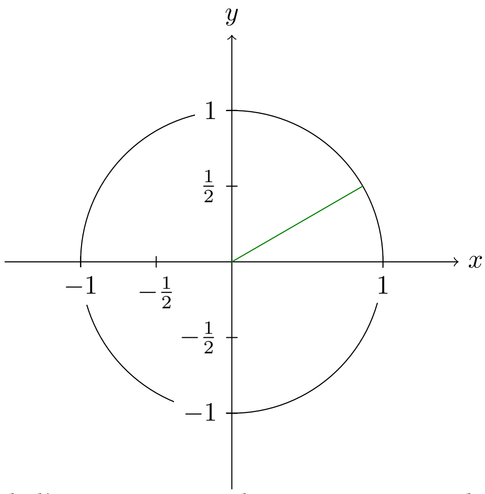
$$\cos(-x) = \cos x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos x, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x, \quad \sin(x + \pi) = -\sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$





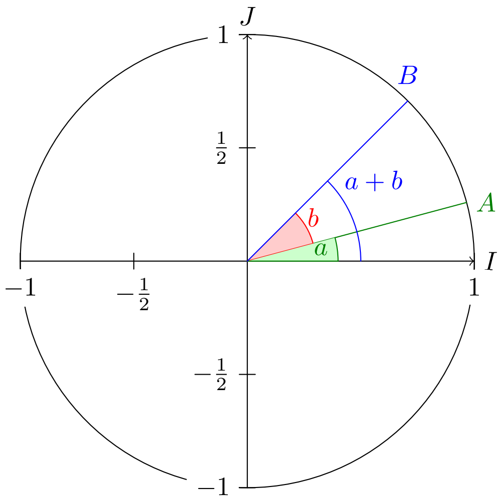
Exercice 4. Retrouver les résultats des questions $e)$ et $f)$ de l'exercice 2 en utilisant une autre technique.
Exercice 5. Résoudre sur $[-\pi, \pi]$ l'inéquation suivante :

$$\sin^2(x) \geq \frac{1}{4}$$

Proposition 7.

Pour tous réels a, b,

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$



Proposition 8.

Pour tous réel a et b

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$
$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

Corollaire 9.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a \qquad \sin 2a = 2\cos a \sin a$$

Exercice 6. Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$, $\sin\frac{\pi}{8}$, $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$.

Corollaire 10.

Pour tout réels p, q,

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{q-p}{2}\right)$$
$$\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

2 Fonctions sinus, cosinus et tangente

Dans cette partie on considère les fonctions sinus et cosinus qui à tout réel associe le sinus et le cosinus définit plus haut. Nous étudierons aussi la fonction tangente.

$$\sin : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array} \right. \qquad \cos : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array} \right.$$

2.1 Étude des fonctions sinus et cosinus

On note cos et sin les fonctions définies par :

Proposition 11.

Les fonctions cosinus et sinus sont dérivables et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

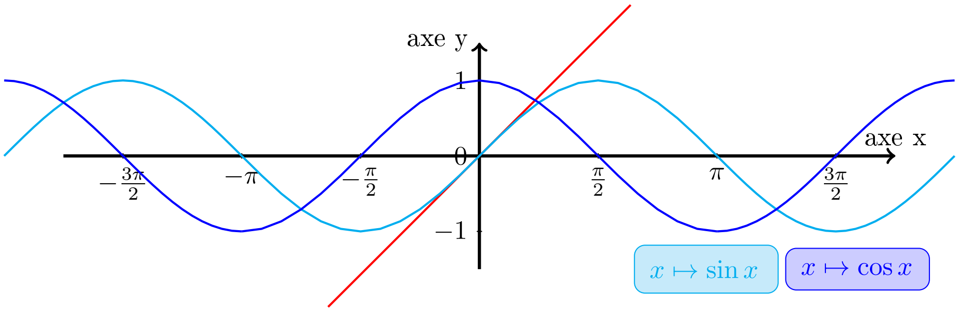
$$\cos' x = -\sin x, \qquad \sin' x = \cos x$$

Les propositions précédentes implique la proposition suivante :

Proposition 12.

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π périodiques, la fonction sinus est impaire et la fonction cosinus est paire. De plus le graphe de sinus est une translation de vecteur $\frac{\pi}{2}\vec{i}$ du graphe de la fonction cosinus.

La proposition précédente permet de réduire l'ensemble d'étude de ces fonctions à $[0,\pi]$ de sin. En effet La dernière assertion permet de déduire le graphe dela fonction cosinus en fonction du graphe de sinus. De plus périodicité de sinus permet de réduire l'étude de sinus à $[-\pi,\pi]$ et sa parité à $[0,\pi]$.



Exercice 7. Donner l'ensemble de définition et calculer la dérivée de la fonction f définie par :

$$f : x \longmapsto (1+\sin x)^{\cos x}$$

2.2 Fonction tangente

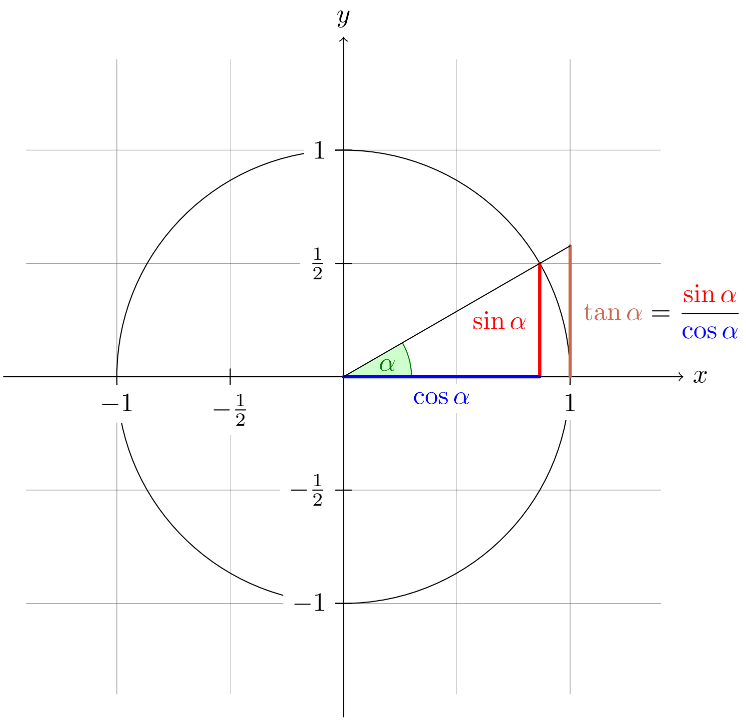
Définition 13.

On définit la fonction tangente notée tan comme suit :

$$\tan : \begin{array}{rcl} \mathcal{D}_{\tan} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\sin x}{\cos x} \end{array}$$

Où l'ensemble de définition $\mathcal{D}_{\tan}$ est défini par :

$$\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



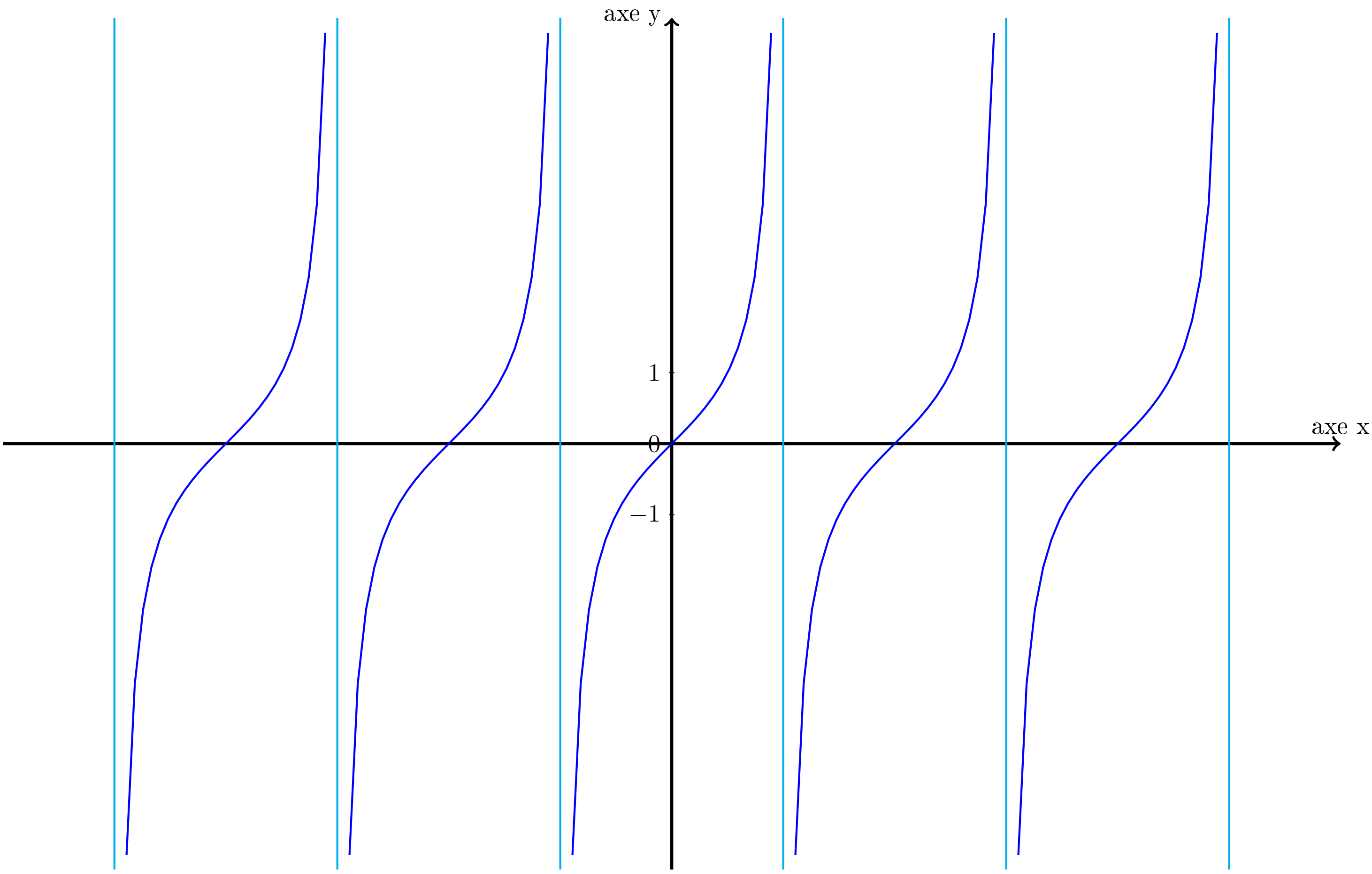
Proposition 14.

Sur son ensemble de définition la fonction tan est impaire et π-périodique.

Proposition 15.

La fontion tangente est dérivable sur son ensemble de définition et

$$\forall x \in \mathcal{D}_{\tan} \quad \tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$



Proposition 16.

Si a, b et $a+b$ appartiennent à l'ensemble de définition de tangente, on a :

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

Si a, b et $a-b$ appartiennent à l'ensemble de définition de tangente, on a :

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

Corollaire 17.

Pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\tan(2a) = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Fonctions réciproques

Les restrictions des fonctions sinus, cosinus et tangente restectivement aux intervalles $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $[0, \pi]$ et $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sont strictement monotones ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires strictement monotone (nous l'appelerons le théorème de la bijection) se sont des bijections à valeurs dans l'intervalles $[-1, 1]$ pour sinus et cosinus et à valeurs dans $\mathbb{R}$ pour tangente. Elles admettent donc des fonctions reciproques.

Définition 18.

On appelle **arcsinus** la fonction réciproque de la restriction de sinus à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$:

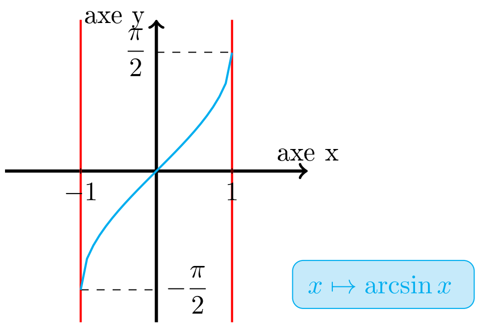
$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

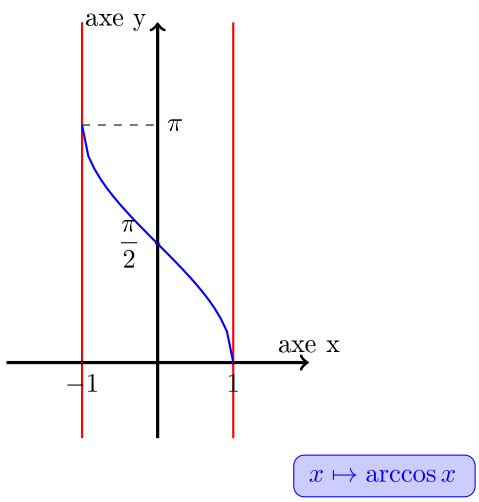
On appelle **arccosinus** la fonction réciproque de la restriction de sinus à l'intervalle $[0, \pi]$:

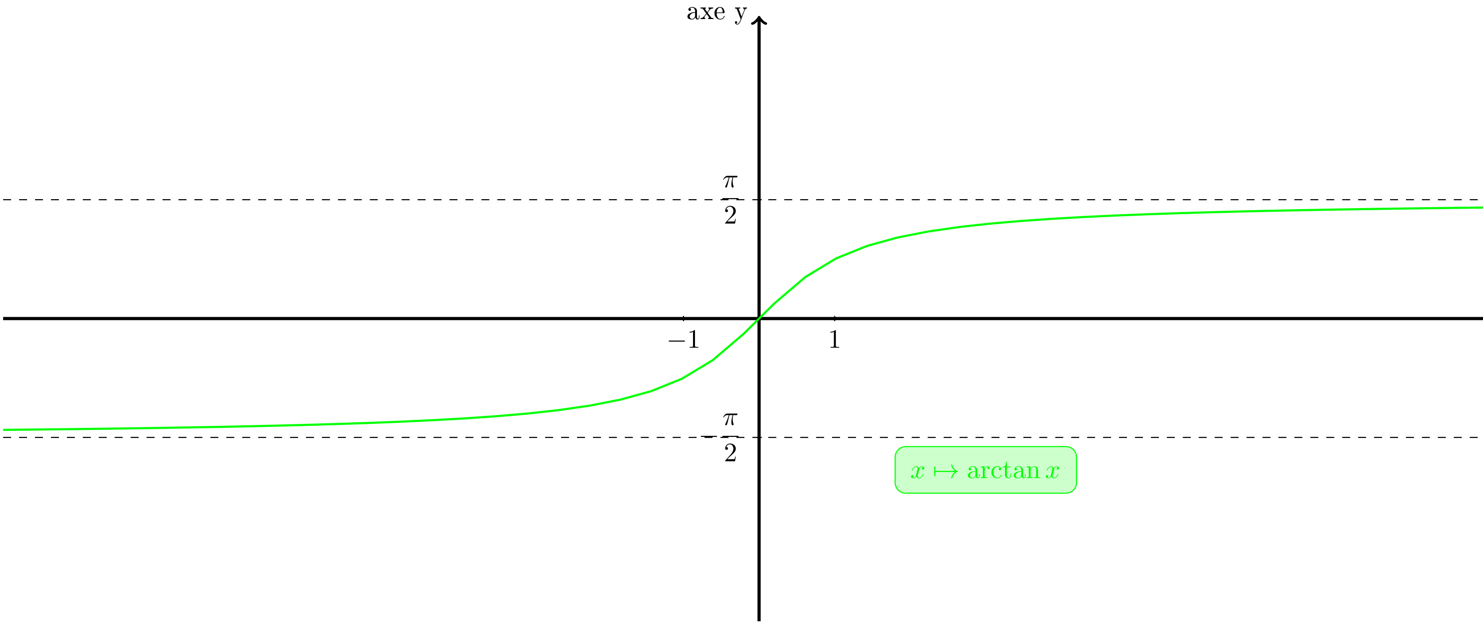
$$\arccos : [-1, 1] \longrightarrow [0, \pi]$$

On appelle **arctangente** la fonction réciproque de la restriction de sinus à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$







La définition d'une fonction réciproque donne immédiatement :

Proposition 19.

$$\begin{array}{cccc} \forall x \in [-1,1] & \sin(\arcsin(x)) = x & \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \arcsin(\sin(x)) = x \\ \forall x \in [-1,1] & \cos(\arccos(x)) = x & \forall x \in [0,\pi] & \arccos(\cos(x)) = x \\ \forall x \in \mathbb{R} & \tan(\arctan(x)) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[& \arctan(\tan(x)) = x \end{array}$$

Attention !
Les égalités de la première colonne n'ont de sens que sur l'intervalle donné. Les égalités de la seconde colonne ont un sens sur l'ensemble de définition de respectivement sinus, cosinus et tangente mais ne sont pas vraies en dehors de l'intervalle indiqué.
Exercice 8. Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \arccos\left(\cos\frac{2\pi}{3}\right), \quad B = \arccos(\cos 4\pi), \quad C = \arccos\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right), \quad D = \arctan\left(\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Exercice 9. Démontre que pour tout réel x,

$$\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Nous démontrerons plus tard la proposition suivante :

Proposition 20.

Les fonctions arcsin et arccos sont dérivables sur $]-1,1[$ et

$$\forall x \in]-1,1[, \qquad \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Exercice 10. Montrer l'inégalité :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \; \arctan(x) \geq x - \frac{x^3}{3}$$

Proposition 21.

$$\forall x \in [-1,1] \qquad \arccos(x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$$

Proposition 22.

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \qquad \arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$