Lycée Condorcet
PCSI

À rendre le 23 septembre

Formule d'inversion de Pascal

Soient $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_n$ des des réels tels que

$$\forall p \in \{0, \dots, n\},\ a_p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b_k$$

Le but de ce problème est de montrer qu'on a alors

$$\boxed{\forall p \in \{0, \dots, n\},\ b_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} a_k}$$

C'est la **formule d'inversion de Pascal**.
On voit aussi ici une application de cette formule.

Démonstration de la formule d'inversion.

1. **Montrer qu'on a, pour tout entier** $\ell \geq 1$ $\displaystyle\sum_{i=0}^{\ell} (-1)^i \binom{\ell}{i} = 0$.

   — 1. Il n'est pas nécessaire d'introduire les variables que vous utilisez dans une somme. Quand on écrit $\displaystyle\sum_{i=1}^{\ell}$... il faut introduire ℓ mais pas i ! C'est le signe somme qui le fait.

   — 2. Bien justifier que $0^\ell = 0$ car $\ell \neq 0$ sinon ce n'est pas vrai !

   — 3. Il faut commencer la question par " soit ℓ un entier non nul".

   — 4. Quand vous avez écrit " montrons que, pour tout c d'entier ℓ on a...". Le "pour tout" définit le sujet de la phrase. Les lettres k et p ne sont définies que jusqu'à la fin de la phrase !
   Pour démontrer la phrase, il faut alors commencé votre démonstration par "soit (k, p) un couple d'entiers tels que...".

   — 5. Attention ! l'égalité n'est vraie que pour $\ell \in \mathbb{N}^*$. Pour $\ell = 0$ ce n'est plus vrai !

2. (a) **Montrer que, pour tous entiers** k**,** q **et** p **tels que** $k \leq q \leq p$**, on a** $\displaystyle\binom{p}{q}\binom{q}{k} = \binom{p}{k}\binom{p-k}{q-k}$**.**

   — 1. Il faut écrire des phrases en français. Pas seulement des égalités.

   — 2. Il faut introduire les entiers que vous utilisez !
   On demande de démontrer qu'une égalité est vraie pour tous entiers p, q, k tels que... Il faut commencer votre rédaction par... "soient p, q, k des entiers tels que..."

   — 3. Quand vous reprenez une égalité après une phrase en français, réécrivez le premier terme de votre égalité et non le dernier. La lecture est plus aisée comme cela.

   (b) **En déduire, pour tout entier** p **et tout entier** $k < p$**, on a** $\displaystyle\sum_{q=k}^{p} (-1)^q \binom{p}{q}\binom{q}{k} = 0$**.**

   — 1. Il faut citer la question précédente quand on utilise le résultat qui y a été démontré.

   — 2. Quand on utilise une égalité dans une somme, bien vérifier qu'elle est vraie pour tout les entiers que parcours les indices dans la somme.

— 3. Bien indiquer dans quelle somme on fait un changement d'indices.

— 4. Pourquoi redémontrer ce qui a déjà été montré à la question 1., on peut se contenter de citer la question !

— 5. Dans une question qui commence par en déduire, il faut nécessairement utiliser le résultat de la question précédente. Si vous ne le faites pas, soit il y a un problème dans votre raisonnement, soit vous faites un raisonnement correct mais vous n'aurez pas les points !

— 6. Il faut introduire les entiers p et k !

— 7. Quand vous avez écrit " montrons que, pour tout couple d'entiers $k < p$ on a...". Le "pour tout" défini le sujet de la phrase. Les lettres k et p ne sont définies que jusqu'à la fin de la phrase ! Pour démontrer la phrase, il faut alors commencé votre démonstration par "soit (k, p) un couple d'entiers tels que...".

(c) Que vaut $\displaystyle\sum_{q=k}^{p}(-1)^q\binom{p}{q}\binom{q}{k}$ pour $k = p$?

3. *Démonstration de la formule d'inversion*

(a) **Justifier qu'on a** $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}a_k = \sum_{k=0}^{p}\sum_{i=0}^{k}(-1)^{p-k}\binom{p}{k}\binom{k}{i}b_i$.

— 1. Quand une donnée est issue de l'énoncé il faut le préciser !

— 2. Ne pas réintroduire les notations déjà données dans l'énoncé !

— 3. Il faut écrire des phrases en français ! ! ! !

(b) **Réécrire l'égalité précédente à l'aide une intervertion de sommes.**

— 1. Quand on cite un théorème du cours, soit le théorème a un nom et on cite son nom, soit en vérifie les hypothèses du théorème et on en déduit la conclusion avec, à la rigueur, une phrase du type : par propriété, d'après le cours.
Mais ne pas citer le numéro de la proposition !
Sans cette question, on peut rédiger en disant : on reconnait une somme triangulaire on a donc...

— 2. Dans cette question, on attendait juste que vous écriviez l'inversion des sommes. Pas plus de calcul !

— 3. Dans un problème, l'idée est d'utiliser les questions précédentes pas de rédémontrer les résultats à chaque fois !

(c) **Finalement, démontrer la formule d'inversion de Pascal donnée dans l'introduction du problème.**

— 1. Il faut écrire des phrases et justifier en citant les questions précédentes !

— 2. Dans un problème, l'idée est d'utiliser les questions précédentes pas de redémontrer les résultats à chaque fois !

— 3. Ne pas réintroduire les notations de l'énoncé.

Application

Soit $p \in \mathbb{N}$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}(-1)^{p-k}(k+1)2^k\binom{p}{k}$.

— 1. Quand on utilise la formule du pion (sans nom, du capitaine...) attention à ne pas diviser par 0 ! Si vous utilisez l'expression avec le quotient $\frac{n}{k}$ attention à enlever avant le terme $k = 0$ dans la somme.

— 2. Ne pas utiliser la formule du pion en dehors de son domaine de validité ! ($k = 0$).

— 3. Attention à utiliser l'implication démontrée dans la formule d'inversion de Pascal et pas sa réiproque !