Lycée Condorcet
PCSI

Septembre 2024

Généralités sur les fonctions réelles

Table des matières

1 Définitions et opérations sur les fonctions

1.1 Fonctions numériques d'une variable réelle

Définition 1.

Une fonction numérique d'une variable réelle $f : E \to F$ est définie par la donnée :
- d'un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$, appelé ensemble de départ (ou de définition),
- d'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}$, appelé ensemble d'arrivée,
- d'un mode d'association : à tout élément de l'ensemble de E correspond un **unique** élément de F.

Si f désigne une fonction et x un élément de l'ensemble de départ alors $f(x)$ est **l'image** de x par f, et si $b = f(x)$ on dit que x est **un antécédent** de b par f.

Proposition 2.

Soient $f : E \to F$ et $g : G \to H$ deux fonctions. Alors f est égale à g si et seulement si $E = G$, $F = H$ et

$$\forall x \in E, \quad f(x) = g(x)$$

On notera alors $f = g$.

Définition 3.

Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$, on dit que f est inférieure ou égale à g si :

$$\forall x \in E, \quad f(x) \leq g(x)$$

On notera alors $f \leq g$.

1.2 Opérations sur les fonctions réelles

Définition 4.

Soient f et g deux fonctions numériques définies sur le même ensemble I et λ un nombre réel.
Alors $f + g$, λf et $f \times g$ sont des fonctions définies sur I par :

$$f+g: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array} \quad \lambda f \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lambda f(x) \end{array} \quad f \times g \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) \times g(x) \end{array}$$

Si de plus, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, alors $\dfrac{f}{g}$ est la fonction de I dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\frac{f}{g}: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

• Composition

Définition 5.

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$ et à valeurs dans $J \subset \mathbb{R}$ et g une fonction définie au moins sur J.
Alors la composée de f par g, notée $g \circ f$, est la fonction définie par :

$$g \circ f: \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

On peut visualiser la composition avec le diagramme suivant (avec les mêmes notations que la définition) :

$$g \circ f: \begin{array}{ccccc} I & \longrightarrow & J & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Pour que le réel $g(f(x))$ soit définie il faut que $f(x)$ appartienne à l'ensemble de définition de g. C'est pourquoi on demande que g soit définie au moins sur J.

Remarque : Toujours avec les mêmes notations. Ce n'est pas parce que $g \circ f$ est définie que $f \circ g$ est définie !

Exemple 1

1. La fonction f définie par :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x^2+3} \end{array}$$

est la composée de la fonction f_1 par f_2 définies par :

$$f_1: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2+3 \end{array} \quad f_2: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

C'est à dire : $f = f_2 \circ f_1$. La fonction $f_1 \circ f_2$ est-elle définie ? Si oui donner son expression.

2. Écrire l'application g définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par $g(x) = x^{x+1}$ comme la composée de trois fonctions.

Remarque : Même si $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies toutes les deux, elles ne sont a priori pas égales !

Définition 6.

Soit X une partie de $\mathbb{R}$. On appelle identité sur l'ensemble X, et on note Id_X la fonction :

$$Id_X : \left\{ \begin{array}{ccc} X & \to & X \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$$

Proposition 7.

Soient X et Y deux parties de $\mathbb{R}$ et une fonction $f : X \to Y$. On a

$$Id_Y \circ f = f \quad \text{et} \quad f \circ Id_X = f$$

2 Vocabulaire relatif aux fonctions

Soit f une fonction à variable réelle défine sur I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$.

Notations :
Soit $f : X \to \mathbb{R}$, où X est une partie de $\mathbb{R}$. On note $f(X)$ l'ensemble des images par f, c'est à dire

$$f(X) = \{f(x), x \in X\}$$

2.1 Majorant minorant

Définition 8.

1. La fonction f est **majorée** (resp **minorée**) sur I s'il existe un réel M (resp. un réel m) tel que

$$\forall x \in I, f(x) \leq M \quad (\text{resp. } \forall x \in I, f(x) \geq m).$$

   On dit alors que M (resp. m) majore (resp. minore) f sur I ou est un majorant (resp. minorant) de f sur I.
2. Une fonction qui est à la fois majorée et minorée est dite bornée. Symboliquement f est bornée si et seulement si :

$$\exists (M, m) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in I, m \leq f(x) \leq M$$

Proposition 9.

Une fonction f est bornée si et seulement si il existe un réel K tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq K$$

Remarques

1. Un majorant n'existe pas toujours. Par exemple l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2$ n'est pas majorée.
2. Un majorant, quand il existe, n'est pas unique : en effet, si M majore f, alors tout réel supérieur à M majore aussi f.
3. Idem pour les minorants.

2.2 Maximum-Minimum :

Définition 10.

1. Soit x_0 un élément de I. On dit que f admet un **maximum** (resp. un **minimum**) en x_0 sur I si :
$$\forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) \quad \big(\text{ resp. } \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0)\big).$$
Dans ce cas, on dit que $f(x_0)$ est le maximum (resp. le minimum) de f sur I et on le note
$$\max_{x\in I} f(x) = \max_I f = f(x_0) \text{ (resp. } \min_{x\in I} f(x) = \min_I f = f(x_0))$$
.

Remarque :

1. La différence entre un maximum et un majorant est que le maximum est atteint par la fonction, alors que le majorant ne l'est pas forcément.
Par exemple la fonction f définie sur $[0,1]$ par :
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est majorée par 3 mais 3 n'est pas le maximum de f sur $[0,1]$. Par contre 1 est le maximum de f sur $[0,1]$.
2. Un maximum (resp. un minimum) est un majorant (resp. un minorant) mais l'inverse est, en général, faux.
3. Une fonction peut être majorée mais ne pas admettre de maximum. Par exemple la fonction g définie par :
$$\begin{array}{rccc} g: &]0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est majorée par 1 mais 1 n'est pas un maximum de la fonction.

Exemple 2

Un tableau de variations montre que la fonction $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ est bornée sur $[-1,1]$ et que :
$$\forall x \in [-1,1], f(x) \leq f(1) = 6, \text{ et } \forall x \in [-1,1] f(x) \geq f(-1/3) = 2/3.$$
La fonction f possède donc un maximum sur $[-1,1]$ en $x_0 = 1$. Elle possède également un minimum sur $[-1,1]$ en $x_0 = -1/3$. Remarquer que si on avait étudié la fonction f sur l'intervalle $[-2,2]$, on aurait obtenu un autre maximum, autrement dit, la notion de minimum et maximum dépend de l'intervalle d'étude.

Exercice 3.

Montrer que la somme de deux fonctions bornées est une fonction bornée. Montrer que le produit de deux fonctions bornées est bornée.

2.3 Fonctions paires, impaires et périodiques

Définition 11.

On dit qu'une fonction numérique réelle $f : E \to F$ est **paire** (resp. **impaire**) si :
$$\begin{cases} \forall x \in E, -x \in E \text{ (on dit que } E \text{ est symétrique par rapport à } 0). & \\ \forall x \in E, f(-x) = f(x) & \big(\text{ resp. } f(-x) = -f(x)\big) \end{cases}$$

Exemple 4

1. Toute application constante sur $\mathbb{R}$ est paire.
2. La seule application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui soit à la fois paire et impaire est l'application nulle.
3. Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^n$. Alors : si n est pair, f est paire ; si n est impair, f est impaire.
4. L'application cosinus est paire, l'application sinus est impaire.

Exemple 5

1. Montrer que l'application f définie par
$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$
est paire.
2. Montrer que l'application g définie par :
$$g: \begin{array}{ccc}]-\infty,2[\cup]2,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{x-2} \end{array}$$
n'est ni paire, ni impaire.
3. Montrer que l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$ est paire.

Exercice 6.

Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to \mathbb{R}$ deux fonctions à valeurs réelles. Montrer que si f et g sont impaires toutes les deux, alors $g \circ f$ est impaire.

Méthode 12.

Une fois démontré la parité ou l'imparité d'une fonction, on peut restreindre l'ensemble d'étude D à $D \cap [0,+\infty[$.

Définition 13.

Une fonction f est **périodique** sur $\mathbb{R}$ si et seulement s'il existe un réel $T > 0$ tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x+T) = f(x).$$
Le réel T est appelé période de la fonction f et on dira que la fonction est T-périodique.

Méthode 14.

Une fois démontrée que la fonction f est périodique de période T, il suffit d'étudier la fonction sur un intervalle de longueur T, par exemple $[0,T]$, ou $\left[-\frac{T}{2},\frac{T}{2}\right]$. On choisit le dernier intervalle si on pense que la fonction peut être aussi paire ou impaire.

Exemple 7

- Les fonctions sinus et cosinus sont périodiques de période 2π
- Déterminer la période de la fonction suivante définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(3x)$$

2.4 Monotonie

Définition 15.

Soit I un intervalle sur lequel f est définie ; on dit que

1. f est croissante sur I lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

2. f est décroissante sur I lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

3. f est strictement croissante sur I lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

4. f est strictement décroissante sur I lorsque :

$$\forall (x_1, x_2) \in I^2, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Une fonction est monotone sur un intervalle si elle est croissante ou décroissante sur cet intervalle.

Exemple 8

1. La fonction $x \mapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$, strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ mais pas monotone sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est-elle décroissante sur $\mathbb{R}^*$?
3. Qu'est-ce qu'une fonction à la fois croissante et décroissante ?
4. Qu'est-ce qu'une fonction qui n'est pas croissante ? Qui n'est pas strictement croissante ?

Proposition 16.

1. La somme ou la composée de deux fonctions croissantes est croissante.
2. La somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.
3. La composée de deux fonctions décroissantes est croissante.
4. La composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.

Exemple 9

Soit f la fonction définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}} \end{array}$$

Cette fonction est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Il y a trois méthodes différentes pour le démontrer :

Méthode 1 : on dérive f et on étudie le signe de f'.

Méthode 2 : On montre directement la définition.

Méthode 3 : On utilise les résultats montrés ci-dessus.

2.5 Représentation d'une fonction

Munissons $\mathbb{R}^2$ du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 17.

Soit f une fonction de E une partie de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. . On appelle **courbe représentative** ou graphe de f, et on note $\mathcal{C}_f$, l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ de coodonnées $(x, f(x))$ pour tout $x \in E$.

$$\mathcal{C}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$$

Proposition 18.

- Une fonction f est paire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
- Une fonction f est impaire si et seulement si sa courbe représentative est symétrique à l'origine O du repère.
- Une fonction f est T- périodique si et seulement si sa courbe représentative est invariante par translation de vecteur $T\vec{i}$.

Proposition 19.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Le graphe de

- $x \mapsto f(x) + a$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $a\vec{j}$.
- $x \mapsto f(x + a)$ se déduit du graphe de f par une translation de vecteur $-a\vec{i}$.
- $x \mapsto f(ax)$ se déduit du graphe de f par une dilatation horizontale de rapport $1/a$.
- $x \mapsto af(x)$ se déduit du graphe de f par une dilatation verticale de rapport a.

Exemple 10

Représenter la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \frac{(x-1)^2}{2} - 1$ à partir de la courbe représentative de l'application $x \mapsto x^2$.

3 Continuité

Définition 20.

Soit f une fonction définie sur un intérvalle I.

- On dit que f est **continue** en un point $a \in I$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
- On dit que f est **continue sur** I si elle est continue en tout point de I.

Exemples de graphes de fonctions continues et non continue en un point.

Proposition 21.

Soient f et g deux fonctions définies et continues sue un intervalle I. Soit λ un réel.

1. Les fonctions $f+g$, $f \times g$ et λf sont encore continues sur I.
2. Supposons que g ne s'annule pas sur I. La fonction $\frac{f}{g}$ est encore continue sur I.

Proposition 22.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et g une fonction continue sur un intervalle J telles que $f(I) \subset J$. Alors $g \circ f$ est encore continue sur I.

Le théorème suivant permet, sous certaines hypothèses de montrer l'existence d'une solution pour une équation d'inconnue x où y est fixé :

$$\boxed{f(x) = y}$$

Théorème 23 (des valeurs intermédiares)**.**

Soit $(a, b) \in R^2$, tel que $a \leq b$ et soit f une fonction **continue** sur le segment $[a, b]$. Si y est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Attention !
Ce théorème donne l'existence d'une solution d'une certaine équation, en aucun cas il n'énonce son unicité !

Exemple 11

Montrer que l'équation d'inconnue x

$$\ln(x) = 2 - x$$

admet une solution (au moins une) dans $\mathbb{R}_+^*$.

4 Dérivation

Dans cette partie I et J sont deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Définition 24.

Soit f une fonction définie sur I et $a \in I$. On dit que f est dérivable en a si le **taux d'accroissement** de f entre x et a :

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad (x \neq a)$$

admet une limite finie quand x tend vers a. Dans ce cas, la limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et est noté $f'(a)$. On note alors :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Interprétation graphique : le réel $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente en a à la courbe représentative de f.

Proposition 25.

Si une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en a, alors **l'équation de la tangente** à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point $(a, f(a))$ est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Remarque :
Lorsque le taux d'accroissement tend vers $\pm\infty$, la courbe admet une tangente verticale.

Définition 26.

Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I.
On appelle **fonction dérivée** de f sur I, que l'on note f' (ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$),la fonction :

$$f' : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

Proposition 27 (Caractérisation de la monotonie par le signe de la dérivée)**.**

Soit f une fonction dérivable sur I.

1. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) > 0$) alors f est **croissante** (resp. **stricetement croissante**) sur I.
2. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) \leq 0$ (resp. $f'(x) < 0$) alors f est **décroissante** (resp. **strictement décroissante**) sur I
3. Si pour tout $x \in I$ $f'(x) = 0$ alors f est **constante** sur I.

Remarques :

1. Noter que f est définie sur un intervalle. Cette hypothèse est essentielle. Contre-exemple l'application inverse.
2. Si f' est positive (resp négative) sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de points, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

Proposition 28.

Soit f une fonction définie sur I. Si f est **dérivable** alors elle est **continue** sur I.

Attention ! La réciproque est fausse ! Exemple l'application valeur absolue.

Proposition 29.

Si les fonctions f et g sont dérivables sur I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $f+g$, λf et fg sont dérivables sur I et

$$(f+g)' = f' + g' \ , \quad (\lambda f)' = \lambda f' \ , \quad (fg)' = f'g + fg'$$

De plus, si, pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$, les fonctions $\dfrac{1}{g}$ et $\dfrac{f}{g}$ sont dérivables sur I et :

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \ , \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Proposition 30.

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(I) \subset J$. Si f est dérivable sur I et si g est déribable sur J alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)).$$

Remarque :
Avec cette formule on retrouve toutes les formules de dérivations de terminale !

5 Bijections (une introduction)

5.1 Injectivité, surjectivité, bijectivité.

Définition 31.

Soit X et Y deux parties de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction $f : X \to Y$. Elle est dite

- **injective** si tout élément de Y a **au plus** un antécédente dans X par f.
- **surjective** si tout élément Y a **au moins** un antécédent dans X par f.

Remarque :
L'injectivité et la surjectivité se lisent sur le graphe d'une fonction : une fonction $f : X \to Y$ est injective (resp. surjective) si pour tout $a \in Y$, son graphe coupe au plus (resp. au moins) une fois la droite d'équation $y = a$.

Exemple 12

Examinons l'injectivité et la surjectivité des applications définies sur $\mathbb{R}$ et à valeur dans $\mathbb{R}$:

$$f_1 : x \mapsto \exp(x), \quad f_2 : x \mapsto \cos(x), \quad f_3 : x \mapsto x(x-1)(x-2), \quad f_4 : x \mapsto x^3$$

Examinons aussi les fonctions :

$$f_5 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_6 : \left\{ \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & [-1,1] \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$$

Définition 32.

Une fonction $f : X \to Y$ est dite **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. On peut alors dire aussi que f **réalise une bijection de X dans Y**.

Autrement dit, une fonction f est bijective de X dans Y si tout élément possède un unique antécédent par f dans X.

Remarque : On peut réécrire la définition précédente à l'aide de quantificateurs :

$$f : X \to Y \text{ est bijective } \iff$$

5.2 Réciproque d'une fonction bijective.

Définition 33.

Soit $f : X \to Y$ une fonction de X dans Y. On dit que $g : Y \to X$ est une **fonction réciproque** de f si et seulement si

$$fg = Id_Y \quad et \quad g \circ f = Id_X$$

Proposition 34.

Si une application admet une réciproque alors elle est unique.

Exemple 13

Les définitions des fonctions ln, arcsin, arccos, arctan.

Méthode 35.

Soit $f : X \to Y$ une fonction et $y \in Y$. S'il est possible de résoudre l'équation

$$y = f(x)$$

C'est à dire d'exprimer x en fonction de y, on a une expression de $f^{-1}(y)$.
Si, pour tout élément $y \in Y$, on sait prouver l'existence et l'unicité d'un antécédent dans X (une solution de l'équation $y = f(x)$), on a prouvé la bijectivité de f.

Exemple 14

Soit f l'application définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} R_+ & \to & [1, +\infty[\\ x & \mapsto & \sqrt{1+x^2} \end{array} \right.$$

Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[1, +\infty[$ et expliciter sa réciproque.

Exercice 15.

Soit f la fonction

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{\ln x}\right) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
2. Expliciter la réciproque de f.

Proposition 36.

Une application $f : X \to Y$ est bijective si et seulement si elle admet une application réciproque et dans ce cas l'application réciproque est l'application définie par :

$$\begin{array}{cccc} f^{-1} : & Y & \longrightarrow & X \\ & y & \longmapsto & f^{-1}(y) \end{array}$$

où $f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent dans X de y par f.

Proposition 37.

Soit $f : I \to J$ une bijection.
Si f est strictement monotone, alors f^{-1} l'est aussi avec la même monotonie.

Exercice 16.

Soit $f :]-a, a[\to]-b, b[$ une fonction bijective (a et b sont deux nombres de $\mathbb{R}_+ \cap \{+\infty\}$). Montrer que si f est impaire, alors f^{-1} l'est aussi.

Proposition 38.

Soit $f : X \to Y$ une fonction bijective. la courbe représentative de la fonction f^{-1} se déduit du graphe de f par symétrie d'axe $y = x$.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ respectivement les courbes représentatives des fonctions f et de sa réciproque f^{-1}. Soient $x \in X$ et $y \in Y$. On a

$$\begin{aligned}(x,y) \in \mathcal{C}_f &\iff y = f(x) \\ &\iff x = f^{-1}(y) \\ &\iff (y,x) \in \mathcal{C}_{f^{-1}}\end{aligned}$$

Les points de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ sont bien obtenus à partir des points de $\mathcal{C}_f$ en "échangeant les coordonnées".

Proposition 39.

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une fonction bijective et dérivable sur I.

Soit y un réel de J. La réciproque de f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'(f^{-1}(y)) \neq 0$. Le nombre dérivé en y vaut alors :

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Notament, si f' ne s'annule pas sur I, alors f^{-1} est dérivable sur J et

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Exemple 17

Calcul de la dérivée de arcsin, arccos, arctan.

Exercice 18.

Soit f la fonction

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $[-1, +\infty[$ dans un intervalle à préciser.
2. Expliciter la réciproque de f.
3. Juste pour réviser : montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée, faire de même avec sa réciproque.

5.3 Bijections continues

Théorème 40 (de la bijection ou TVI strictement monotone)**.**

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

Si f est **strictement monotone** et **continue** sur I, alors elle réalise une bijection de I dans $f(I)$, qui est aussi un intervalle.

Exemple 19

Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n + 1 - nx$.

1. Montrer que, pour tout entier $n \geq 3$, l'équation $x^n + 1 = nx$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0, 1]$. On note x_n cette solution. que vaut x_2 ?
2. Justifier que pour tout $n \geq 3$,
$$\frac{1}{n} \leq x_n \leq \frac{1}{2}$$
En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge.
3. En utlisant la défintion de x_n, déterminer $\lim\limits_{n \to \infty} nx_n$.