Lycée Condorcet
PCSI

28 septembre 2024

Devoir surveillé 2
Mathématiques
2 heures

Problème 1 : Une inégalité

Soient n un entier naturel.

1. Soit un entier naturel k tel que $k \leq n$.
   (a) Montrer l'inégalité
   $$\frac{n!}{k!} \leq \frac{(2n-k)!}{n!}.$$
   Indication : On pourra écrire les quotients ci-dessus comme des produits que l'on comparera facteur à facteur.
   (b) En déduire l'inégalité :
   $$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$
2. Justifier que l'inégalité précédente demeure vraie lorsque $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.
3. En déduire :
$$2^{2n} \leq (2n+1)\binom{2n}{n}.$$

Problème 2 : Une inégalité sur des moyennes

Soit n un entier naturel non nul.

On commence par quelques propriétés sur les racines n-ième. Vous n'avez pas besoin de redémontrer ces propriétés.
Pour tout réel positif x, il existe un unique réel positif r tel que $r^n = x$, il est appelé la racine n-ième de l'unité et noté $\sqrt[n]{x}$ ou $(x)^{1/n}$, et on a pour tout couple de réels positifs (x, y)
$$\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x \text{ et } \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}.$$

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels positifs. On appelle

— **moyenne arithmétique** de $a_1, \cdots, a_n$ le nombre :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

— et **moyenne géométrique** le nombre

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$$

L'inégalité arithmético-géométrique affirme que la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique, c'est à dire :

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Les deux premières parties de ce problème consistent à démontrer cette inégalité de deux façons différentes. Dans la troisième partie, on en donne quelques applications.

1. **Une première démonstration de l'inégalité.**

   (a) i. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a : $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

   ii. Étant donnés un entier naturel n et 2^n réels positifs a_1, a_2, $\cdots$, a_{2^n}, montrer que l'on a

   $$\left(\prod_{k=1}^{2^n} a_k\right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} a_k$$

   On pourra raisonner par récurrence et utiliser la question précédente en regroupant des termes deux par deux.

   (b) Soient n un entier et a_1, a_2, $\cdots$, a_n des réels positifs. On note :

   $$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

   i. Montrer que $2^n \geq n$.

   ii. On pose :

   $$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^n} = m$$

   En utilisant la question $(a)ii$, montrer l'inégalité arithmético géométrique.

2. **Une deuxième démonstration de l'inégalité**

   (a) Soit n un entier naturel. Soient x_1, $\cdots$, x_{n+1} des réels strictement positifs tels que
$$\prod_{k=1}^{n} x_k = 1.$$
   Montrer qu'il existe deux entiers $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]$, distincts, pour lesquels $x_i \leq 1 \leq x_j$, puis montrer que $x_i + x_j - x_i x_j \geq 1$.

   (b) Montrer par récurrence sur n la proposition suivante :
$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \left(\prod_{k=1}^{n} x_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n \right).$$

   (c) En déduire une démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique.

3. **Des applications**

   Les différentes questions de cette partie sont indépendantes.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2} \right)^n.$$

   (b) Soient x_1, x_2, $\cdots$, x_n des réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$

   (c) Soient a et b deux réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{a^2}{a^6 + b^2} \leq \frac{1}{2ab}$$
   Puis que
$$\frac{a^2}{a^6 + b^2} + \frac{a^2}{a^6 + b^2} \leq \frac{1}{ab}$$

   (d) soient a, b, c trois réels positifs. Montrer que $a^3 b + b^3 c + c^3 a \geq 3a^2 b^2 c^2$.