Lycée Condorcet — 28 septembre 2024
PCSI

# Devoir surveillé 2
## Mathématiques
## Indications
2 heures

**Problème 1 : Une inégalité**
**Soient $n$ un entier naturel.**

1. **Soit un entier naturel $k$ tel que $k \leq n$.**
   (a) **Montrer l'inégalité**
   $$\frac{n!}{k!} \leq \frac{(2n-k)!}{n!}.$$
   On pourra écrire les quotients ci-dessus comme des produits que l'on comparera facteur à facteur.
   (b) **En déduire l'inégalité :**
   $$\binom{2n}{k} \leq \binom{2n}{n}.$$
   Calculer le quotient des deux coefficients binomiaux et comparer le à 1.
2. **Justifier que l'inégalité précédente demeure vraie lorsque $k \in [\![n+1, 2n]\!]$.**
   Symétrie...
3. **En déduire :**
   $$2^{2n} \leq (2n+1)\binom{2n}{n}.$$
   Penser au binôme de Newton !

**Problème 2 : Une inégalité sur des moyennes**

**Soit $n$ un entier naturel non nul.**

**On commence par quelques propriétés sur les racines $n$-ième. Vous n'avez pas besoin de redémontrer ces propriétés.**
**Pour tout réel positif $x$, il existe un unique réel positif $r$ tel que $r^n = x$, il est appelé la racine $n$-ième de l'unité et noté $\sqrt[n]{x}$ ou $(x)^{1/n}$, et on a pour tout couple de réels positifs $(x, y)$**
$$\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x \textbf{ et } \sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}.$$

**Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels positifs. On appelle**

— **moyenne arithmétique de $a_1, \cdots, a_n$ le nombre :**

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

— **et moyenne géométrique le nombre**

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{1/n}$$

**L'inégalité arithmético-géométrique affirme que la moyenne géométrique est inférieure ou égale à la moyenne arithmétique, c'est à dire :**

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

**Les deux premières parties de ce problème consistent à démontrer cette inégalité de deux façons différentes. Dans la troisième partie, on en donne quelques applications.**

1. **Une première démonstration de l'inégalité.**

   (a) i. **Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^2$, on a :** $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.
   Faire apparaitre un carré !

   ii. **Étant donnés un entier naturel $n$ et $2^n$ réels positifs $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_{2^n}$, montrer que l'on a**

   $$\left(\prod_{k=1}^{2^n} a_k\right)^{1/2^n} \leq \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{2^n} a_k$$

   On pourra raisonner par récurrence et utiliser la question précédente en regroupant les termes en deux paquets. Utilisez les propriétés des puissances. Vous aurez aussi besoin de $1/2^{n+1} = 1/2 \times 1/2^n$.

   (b) **Soient $n$ un entier et $a_1$, $a_2$, $\cdots$, $a_n$ des réels positifs. On note :**

   $$m = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

   i. **Montrer que $2^n \geq n$.**
   Vous pouvez le faire par récurrence mais ce n'est pas le plus rapide. Pensez au binôme de Newton !

ii. **On pose :**

$$a_{n+1} = a_{n+2} = \cdots = a_{2^n} = m$$

**En utilisant la question $(a)ii$, montrer l'inégalité arithmético géométrique.** Appliquez l'inégalité trouver en $2aii$ aux $2^n$ réels $a_1, \cdots, a_n, m, \cdots m$. Puis dans le produit d'une part et dans la somme d'autre part utiliser une relation de Chasles. IL reste un petit travail sur les puissance à faire.

2. **Une deuxième démonstration de l'inégalité**

(a) **Soit $n$ un entier naturel. Soient $x_1$, $\cdots$, $x_{n+1}$ des réels strictement positifs tels que**

$$\prod_{k=1}^{n} x_k = 1.$$

**Montrer qu'il existe deux entiers $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]$, distincts, pour lesquels $x_i \leq 1 \leq x_j$, puis montrer que $x_i + x_j - x_i x_j \geq 1$.** Pour la première partie de la question faire tout d'abord une disjonction de cas : traiter le cas où tous les $x_i$ sont égaux à 1. Puis traiter le cas où il existe un $i \in [\![1, n+1]\!]$ tel que $x_i \neq 1$ en faisant un raisonnement par l'absurde.
Pour la deuxième partie de la question séparer les deux inégalité trouver plus haut. Dans l'inégalité que vous voulez démontrer factoriser partiellement par $x_i$.

(b) **Montrer par récurrence sur $n$ la proposition suivante :**

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n, \quad \left( \prod_{k=1}^{n} x_k = 1 \implies \sum_{k=1}^{n} x_k \geq n \right).$$

Dans l'hérédité fixer un $n+1$-uplet de réels $(x_1, \cdots, x_{n+1})$ tel que $\prod_{k=1}^{n+1} x_k = 1$. Utiliser la question précédente et appliquer l'hypothèse de récurrence à $n$-uplet de réels bien choisis.

(c) **En déduire une démonstration de l'inégalité arithmético-géométrique.**
Fixer $(x_1, \cdots, x_n)$ un $n$-pliet de réels.
Traiter d'abord le cas où au moins un des réels considérés est nul. Puis traiter le cas pour aucun des réels nuls.
Pour traiter ce dernier cas appliquez ce que vous venez de démontrer à la question précédente à un $n$-uplet de réels bien choisis.

3. **Des applications**

*Les différentes questions de cette partie sont indépendantes.*

(a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$
(b) Soient $x_1$, $x_2$, $\cdots$, $x_n$ des réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$
(c) Soient $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. Montrer que :
$$\frac{a^2}{a^6+b^2} \leq \frac{1}{2ab}$$
Puis que
$$\frac{a^2}{a^6+b^2} + \frac{a^2}{a^6+b^2} \leq \frac{1}{ab}$$
(d) soient $a$, $b$, $c$ trois réels positifs. Montrer que $a^3b + b^3c + c^3a \geq 3a^2b^2c^2$.