Lycée Condorcet 12 octobre 2024
PCSI

Devoir surveillé 3
Mathématiques
2 heures

Problème I : Fonction tangente hyperbolique

Partie A. Étude.

Notée th, cette fonction est définie par

$$\mathrm{th} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) := \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}.$$

1. Justifier que fonction th est bien définie.
   Montrer que th est impaire.
2. Exprimer th' à l'aide de ch, puis à l'aide de th.
3. Donner le tableau de variations de th (avec les limites, soigneusement calculées).
4. En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser.
5. Montrer l'inégalité :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{th}(x) \leq x.$$
6. Donner le graphe de la fonction th (la calculatrice ne sert à rien : le graphe résume les renseignements collectés dans l'étude).

Partie B. Fonction réciproque.

Le but de la suite est de donner une expression de la réciproque de th,
en utilisant deux méthodes.

1. En résolvant l'équation $y = \mathrm{th}(x)$ pour $y \in I$, exprimer $\mathrm{th}^{-1}(y)$ en fonction de y.
2. Démontrer que th^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
   En déduire à nouveau une expression de la réciproque th^{-1}.

Partie C. Formules de duplication.

1. Établir, pour tout réel a les identités dites de duplication
$$\mathrm{ch}(2a) = 2\mathrm{ch}^2(a) - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a).$$
2. Exprimer $\mathrm{th}(2a)$ à l'aide de $\mathrm{th}(a)$.

Problème II : Inégalité arithmético-géométrique le retour...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I- Une autre démonstration.

Pour tout $x_1, \cdots, x_n$, réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de $x_1, \cdots, x_n$ par respectivement :

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k, \qquad \text{et} \qquad \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique donnée par :

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \qquad \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k$$

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Dans la suite de cette partie on notera $a = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} x_k$

1. Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln((x) \leq x - 1$.
2. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1 \right) = 0$
3. Déduire des questions précédentes : $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(\frac{x_k}{a} \right) \leq 0$
4. En déduire l'inégalité cherchée.

Partie II-Applications de l'inégalité arithmético-géométrique

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

5. **Première application** En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à des réels bien choisis, montrer que :
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$
6. **Seconde application**
   (a) Montrer que : $$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{\displaystyle\prod_{1 \leq k \leq n} x_k} \right)^{1/n}$$
   (b) En déduire que : $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times \left(\tfrac{1}{x_1} + \tfrac{1}{x_2} + \cdots + \tfrac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

Partie III- Estimation de la différence

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On pose : $g = \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}$, $\quad a = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leq k \leq n} x_k \quad$ et $q = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j} \right)^2$

Le but de cette partie est d'encadrer $a - g$.

7. Minorer $a - g$.
8. Montrer que : $\displaystyle\sum_{1 \leq 1 < j \leq n} (x_i + x_j) = n(n-1)a \quad$ et $\quad \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{x_i x_j} = g^{n(n-1)/2}$
   Pour montrer la première égalité on commencera par utiliser la linéarité des sommes.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, on pose $y_{i,j} = \sqrt{x_i x_j}$.

9. Déduire de la question précédente que g est la moyenne géométrique des $y_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.
10. En appliquant l'inégalité arithm'ético-géométrique aux réels $y_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$ montrer que :
$$a - g \geq \frac{q}{n-1}$$