Lycée Condorcet
PCSI

12 octobre 2024

Devoir surveillé 3
Mathématiques

2 heures

Problème I : Fonction tangente hyperbolique

<u>Partie A.</u> Étude.

Notée th, cette fonction est définie par

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{th}: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{th}(x) := \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}.$$

1. **Justifier que fonction th est bien définie.**
   Montrer que th est impaire.
2. **Exprimer th' à l'aide de ch, puis à l'aide de th.**
3. **Donner le tableau de variations de th (avec les limites, soigneusement calculées).**
4. **En déduire que th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à préciser.**
5. **Montrer l'inégalité :**
$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \quad \mathrm{th}(x) \leq x.$$
6. **Donner le graphe de la fonction th (la calculatrice ne sert à rien : le graphe résume les renseignements collectés dans l'étude).**

<u>Partie B.</u> Fonction réciproque.

Le but de la suite est de donner une expression de la réciproque de th, en utilisant deux méthodes.

1. **En résolvant l'équation $y = \mathrm{th}(x)$ pour $y \in I$, exprimer $\mathrm{th}^{-1}(y)$ en fonction de y.**
2. **Démontrer que th^{-1} est dérivable sur I et calculer sa dérivée.**
   En déduire à nouveau une expression de la réciproque th^{-1}.

<u>Partie C.</u> Formules de duplication.

1. **Établir, pour tout réel a les identités dites de duplication**
$$\mathrm{ch}(2a) = 2\mathrm{ch}^2(a) - 1 \quad \textbf{et} \quad \mathrm{sh}(2a) = 2\mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(a).$$
2. **Exprimer $\mathrm{th}(2a)$ à l'aide de $\mathrm{th}(a)$.**

Corrigé

<u>Partie A.</u> Étude.

1. La fonction ch ne s'annulant pas (elle prend des valeurs supérieures à 1) la fonction th est bien définie sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Soit x un réel. En se souvenant que ch est paire et que sh est impaire, on calcule
$$\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x).$$
   Ceci montre que th est impaire, ce qui permet de réduire l'étude à $[0, +\infty[$: le graphe sur $\mathbb{R}_-$ se déduit par symétrie centrale par rapport à l'origine du repère.

2. La fonction th est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient. Pour x un réel,

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}(x)\mathrm{sh}'(x) - \mathrm{ch}'(x)\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}.$$

On a aussi

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{ch}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} - \frac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x).$$

3. Pour tout x réel, $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} > 0$. La fonction th est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Le calcul des limites réclame une factorisation par le terme prépondérant. Pour x réel,

$$\mathrm{th}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x\left(1 - e^{-2x}\right)}{e^x\left(1 + e^{-2x}\right)} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 1.$$

La limite en $-\infty$ vaut -1 par imparité. On a le tableau de variations

x	$-\infty$	$+\infty$
$\mathrm{th}'(x)$	$+$	
th	-1	1

4. L'application th est strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, continue, le thèorème de la bijection assure ainsi que c'est une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans l'intervalle image $[-1, 1]$.
5. L'équation de la tangente en 0 est $y = \mathrm{th}'(0)x + \mathrm{th}(0)$, c'est à dire

$$y = x.$$

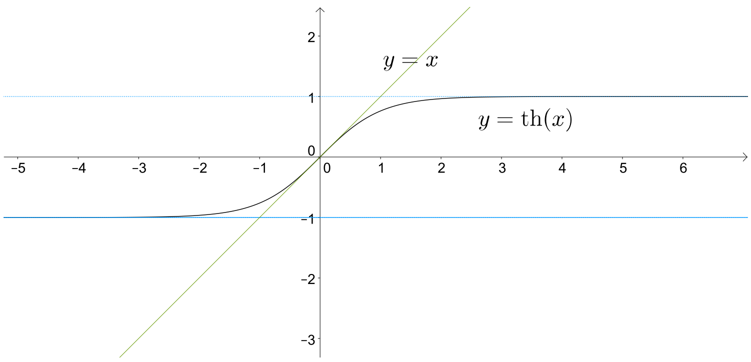
L'inégalité que l'on va démontrer ci-dessous dit que la fonction th reste en-dessous de sa tangente en 0 sur $[0, +\infty[$. Posons $u : x \mapsto \mathrm{th}(x) - x$. Cette fonction est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad u'(x) = \mathrm{th}'(x) - 1 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - 1 \leq 0,$$

la dernière inégalité étant obtenue en se souvenant que $\mathrm{ch}(x)$ est supérieur à 1 pour tout x. Ainsi, u est décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$, et

$$\forall x \geq 0 \quad u(x) \leq u(0) = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer.
6.



Partie B. Fonction réciproque.

1. Soit $y \in]-1, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} y = \mathrm{th}(x) \iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} &\iff y = \frac{\cancel{e^{-x}}\, e^{2x} - 1}{\cancel{e^{-x}}\, e^{2x} + 1} \\ &\iff (e^{2x} + 1)y = e^{2x} - 1 \\ &\iff e^{2x}(y - 1) = -1 - y \\ &\iff x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1 + y}{1 - y}\right). \end{aligned}$$

Remarque : puisque l'on a établi déjà que th était bijective, seules les implications directes sont importantes. On en conclut que $\text{th}^{-1} : y \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$.

2. La fonction th, bijection de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée $1/\text{ch}^2$ ne s'y annule pas. D'après le théorème de dérivation des réciproques, th^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et

$$\forall y \in]-1,1[\quad \left(\text{th}^{-1}\right)' = \frac{1}{\text{th}'(\text{th}^{-1}(y))} = \frac{1}{1-\text{th}^2(\text{th}^{-1}(y))} = \frac{1}{1-y^2}.$$

La décomposition en éléments simples permet de calculer une primitive de $y \mapsto \frac{1}{1-y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-y} - \frac{1}{1+y}\right)$: sur $]-1,1[$, on propose $y \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)$. La fonction th^{-1} et cette dernière sont égales à une constante près sur $]-1,1[$: il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall y \in]-1,1[\quad \text{th}^{-1}(y) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right) + C.$$

Il reste à évaluer en 0 pour s'apercevoir que $C = 0$. On retrouve l'expression obtenue en 3.

Partie C. Formules de duplication.

1. La formule la plus simple à obtenir est celle pour sh car on voit rapidement une identité remarquable :

$$\begin{aligned}\text{sh}(2a) = \frac{e^{2a}-e^{-2a}}{2} = \frac{(e^a)^2-(e^{-a})^2}{2} &= \frac{(e^a+e^{-a})\cdot(e^a-e^{-a})}{2} \\ &= \frac{(2\text{ch}(a))\cdot(2\text{sh}(a))}{2} \\ &= 2\text{ch}(a)\text{sh}(a).\end{aligned}$$

Pour ch, on va forcer l'apparition d'une identité remarquable :

$$\begin{aligned}\text{ch}(2a) = \frac{e^{2a}+e^{-2a}}{2} = \frac{(e^a)^2+(e^{-a})^2}{2} &= \frac{(e^a)^2+(e^{-a})^2+2e^a\cdot e^{-a}-2e^a\cdot e^{-a}}{2} \\ &= \frac{(e^a+e^{-a})^2-2\cdot e^0}{2} \\ &= \frac{(2\text{ch}(a))^2-2}{2} \\ &= 2\text{ch}^2(a)-1.\end{aligned}$$

Note : ici, puisque l'énoncé nous donner la réponse, on pouvait aussi partir du calcul de $2\text{ch}^2(a)-1$!

2. $\text{th}(2a) = \dfrac{\text{sh}(2a)}{\text{ch}(2a)} = \dfrac{2\text{sh}(a)\text{ch}(a)}{2\text{ch}^2(a)-1} = \dfrac{2\text{sh}(a)\text{ch}(a)}{2\text{ch}^{2(a)}}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{2\text{ch}^2(a)}} = \dfrac{\text{th}(a)}{1-\frac{1}{2\text{ch}^2(a)}}$. Or, lors du calcul de la dérivée, nous avons vu que $\frac{1}{\text{ch}^2(a)} = 1-\text{th}^2(a)$. Ainsi,

$$\text{th}(2a) = \frac{\text{th}(a)}{1-\frac{1}{2}(1-\text{th}^2(a))} = \frac{2\text{th}(a)}{1+\text{th}^2(a)}.$$

Problème II : Inégalité arithmético-géométrique le retour...

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I- Une autre démonstration.

Pour tout $x_1, \cdots, x_n$, réels strictement positifs on définit la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de $x_1, \cdots, x_n$ par respectivement :

$$\frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k, \qquad \textbf{et} \qquad \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Le but de cette partie est de démontrer l'inégalité arithmético-géométrique donnée par :

$$\forall (x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n \qquad \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k$$

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. Dans la suite de cette partie on notera $a = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k$

1. **Montrer que, pour tout $x > 0$, $\ln((x) \leq x - 1$.**
2. **Montrer que : $\sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1 \right) = 0$**
3. **Déduire des questions précédentes : $\sum_{1 \leq k \leq n} \ln \left(\frac{x_k}{a} \right) \leq 0$**
4. **En déduire l'inégalité cherchée.**

Partie II-Applications de l'inégalité arithmético-géométrique

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$.

5. **Première application En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique à des réels bien choisis, montrer que :**
$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \cdots + \frac{x_{n-1}}{x_n} + \frac{x_n}{x_1} \geq n$$
6. **Seconde application**
   (a) **Montrer que :** $$\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{\prod_{1 \leq k \leq n} x_k} \right)^{1/n}$$
   (b) **En déduire que :** $$(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \times \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2$$

Partie III- Estimation de la différence

Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On pose : $g = \left(\prod_{1 \leq k \leq n} x_k \right)^{\frac{1}{n}}$, $\quad a = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \quad$ et $q = \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j} \right)^2$

Le but de cette partie est d'encadrer $a - g$.

7. **Minorer $a - g$.**
8. **Montrer que : $\sum_{1 \leq 1 < j \leq n} (x_i + x_j) = n(n-1)a \quad$ et $\quad \prod_{1 \leq i < j \leq n} \sqrt{x_i x_j} = g^{n(n-1)/2}$**
   Pour montrer la première égalité on commencera par utiliser la linéarité des sommes.

Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i < j$, on pose $y_{i,j} = \sqrt{x_i x_j}$.

9. **Déduire de la question précédente que g est la moyenne géométrique des $y_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$.**

10. En appliquant l'inégalité arithm'ético-géométrique aux réels $y_{i,j}$ pour $1 \leq i < j \leq n$ montrer que :

$$a - g \geq \frac{q}{n-1}$$

Corrigé

1. Soit f la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x - 1 - \ln x$. Cette fonction est dérivable comme somme de fonctions dérvables et pour tout $x > 0$ on a :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Étudions le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a comme x est strictement positif

$$\begin{aligned} f'(x) \geq 0 &\iff x - 1 \geq 0 \\ &\iff x \geq 1 \end{aligned}$$

Ainsi f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$. Elle admet donc un minimum en 1. Or $f(1) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geq 0$. On a donc bien :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leq x - 1}$$

2. On a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1 \right) &= \frac{1}{a} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k - \sum_{1 \leq k \leq n} 1 \\ &= \frac{1}{a} na - n \\ &= 0 \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1 \right) = 0}$$

3. Notons que, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, x_k est positif et comme a est une somme de termes positifs, $\frac{x_k}{a}$ est positif. Ainsi d'après la question 1 on a :

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \qquad \ln\left(\frac{x_k}{a}\right) \leq \left(\frac{x_k}{a} - 1\right)$$

En sommant ces n inégalités on obtient :

$$\sum_{1 \leq k \leq n} \ln\left(\frac{x_k}{a}\right) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1\right)$$

Or d'après la question précédente : $\sum_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{x_k}{a} - 1\right) = 0$ ainsi on a bien :

$$\boxed{\sum_{1 \leq k \leq n} \ln\left(\frac{x_k}{a}\right) \leq 0}$$

4. D'après les propriétés du logarithme on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln\left(\frac{x_k}{a}\right) \leq 0 &\iff \sum_{1 \leq k \leq n} \ln(x_k) \leq \sum_{1 \leq k \leq n} \ln(a) \\ &\iff \sum_{1 \leq k \leq n} \ln(x_k) \leq n \ln(a) \\ &\iff \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{n} \ln(x_k) \leq \ln(a) \end{aligned}$$

En effet n est positif et on distibue $\frac{1}{n}$ dans la somme. Et comme la fonction exponentielle est strictement croissante on a :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq k \leq n} \ln\left(\frac{x_k}{a}\right) \leq 0 &\iff \exp\left(\sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{n} \ln(x_k)\right) \leq \exp(\ln(a)) \\ &\iff \prod_{1 \leq k \leq n} \exp\left(\frac{1}{n} \ln(x_k)\right) \leq a \\ &\iff \prod_{1 \leq k \leq n} x_k^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n} \sum_{1 \leq k \leq n} x_k \end{aligned}$$

On a donc bien

$$\boxed{\left(\prod_{1\leq k\leq n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} x_k}$$

5. Notons que pour tout $k \in [\![1, n-1]\!]$ les réels $\dfrac{x_k}{x_{k+1}}$ et $\dfrac{x_n}{x_1}$ sont définis et positifs on peut donc appliquer l'inégalité arithmético-géométrique. On a alors

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)+\frac{x_n}{x_1}\right] && \geq && \left(\frac{x_n}{x_1}\times\prod_{1\leq k\leq n-1}\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)^{\frac{1}{n}} \\
\iff & \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)+\frac{x_n}{x_1}\right] && \geq && \left(\frac{\prod_{1\leq k\leq n} x_k}{\prod_{1\leq k\leq n} x_k}\right)^{\frac{1}{n}} \\
\iff & \frac{1}{n}\left[\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)+\frac{x_n}{x_1}\right] && \geq && 1 \\
\iff & \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x_k}{x_{k+1}}\right)+\frac{x_n}{x_1} && \geq && n
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_3}+\cdots+\frac{x_{n-1}}{x_n}+\frac{x_n}{x_1}\geq n}$$

6. (a) Notons que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$,les réels $\dfrac{1}{x_k}$ sont positifs, ainsi d'après l'inégalité aréthmico-géométrique on a :

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right) \geq \left(\prod_{1\leq k\leq n}\frac{1}{x_k}\right)^{\frac{1}{n}}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\frac{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}}{n} \geq \left(\frac{1}{\prod_{1\leq k\leq n} x_k}\right)^{1/n}}$$

(b) Les termes de l'inégalité montrée à la question précédente et l'inégalité arithméco-géométrique appliquée aux réels $x_1, \cdots, x_n$ sont positifs on peut donc multiplier ces deux inégalités on obtient alors le résultat chercé :

$$\boxed{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\times\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)\geq n^2}$$

7. D'après l'inégalité arithmético-géométrique on a l'inégalité $g \leq a$ on a donc $a - g \geq 0$.
8. On a la suite d'égalités :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i + x_j &= \sum_{1\leq i<j\leq n} x_i + \sum_{1\leq i<j\leq n} x_j && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \sum_{1\leq i\leq n}\sum_{i+1\leq j\leq n} x_i + \sum_{1\leq j\leq n}\sum_{1\leq i\leq j-1} x_j \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} x_i \sum_{i+1\leq j\leq n} 1 + \sum_{1\leq j\leq n} x_j \sum_{1\leq i\leq j-1} 1 && \text{car } x_i \text{ ne dépend pas de } j \text{ et } x_j \text{ ne dépend pas de } i \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} x_i(n-i) + \sum_{1\leq j\leq n} x_j(j-1) \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} x_i(n-i) + \sum_{1\leq i\leq n} x_i(i-1) && \text{car les variables sont muettes} \\
&= \sum_{1\leq i\leq n} x_i(n-1) && \text{par linéarité de la somme} \\
&= n(n-1)\frac{1}{n}\sum_{1\leq i\leq n} x_i
\end{aligned}$$

On a donc bien :

$$\boxed{\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i + x_j = n(n-1)a}$$

On a de même :

$$\begin{aligned}
\prod_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j} &= \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i}\right) \times \left(\prod_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_j}\right) \\
&= \left(\prod_{1\leq i\leq n} \prod_{i+1\leq j\leq n} \sqrt{x_j}\right) \times \left(\prod_{1\leq j\leq n} \prod_{1\leq i\leq j-1} \sqrt{x_j}\right) \\
&= \left(\prod_{1\leq i\leq n} (\sqrt{x_i})^{n-i}\right) \times \left(\prod_{1\leq j\leq n} (\sqrt{x_j})^{j-1}\right) && \text{car } x_i \text{ ne dépend pas de } j \text{ et } x_j \text{ ne dépend pas de} \\
&= \left(\prod_{1\leq i\leq n} (x_i)^{\frac{1}{2}(n-i)}\right) \times \left(\prod_{1\leq i\leq n} (x_i)^{\frac{1}{2}(i-1)}\right) && \text{car les variables sont muettes} \\
&= \prod_{1\leq i\leq n} (x_i)^{\frac{1}{2}(n-1)} && \text{par linéarité de la somme} \\
&= \left(\prod_{1\leq i\leq n} x_i\right)^{\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}}
\end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\boxed{\prod_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j} = g^{n(n-1)/2}}$$

9. Notons qu'il y a $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments $y_{i,j}$ ainsi la moyenne géométrique de ces réels est :

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{1\leq i<i\leq n} y_{i,j}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} &= \left(\prod_{1\leq i\leq n} x_i\right)^{\frac{1}{n}\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{2}{n(n-1)}} && \text{d'après la question précédente} \\
&= \left(\prod_{1\leq i\leq n} x_i\right)^{\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi la moyenne géométrique des } y_{i,j} \text{ pour tout } (i,j)\in[\![1,n]\!]^2 \text{ tel que } i<j \text{ est bien égale à } g.}$$

10. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i < j$ les réels $y_{i,j}$ sont strictement positifs ainsi on a d'après l'inégalité arithmético-géométrique et d'arpès la question précédente :

$$\begin{aligned}
g &\leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} y_{i,j} \\
&\leq \frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j}
\end{aligned}$$

Mais pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $i<j$ on a :

$$(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2 = x_i - 2\sqrt{x_i x_j} + x_j \iff \sqrt{x_i x_j} = \frac{x_i + x_j}{2} - \frac{(\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2}{2}$$

Comme cette inégalité est bien vraie pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i<j$ on peut les sommer entre elles, en multipliant par $\frac{2}{n(n-1)}$ qui est positif on obtient :

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j} \leq \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} (x_i + x_j) - \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} (\sqrt{x_i} - \sqrt{x_j})^2$$

Ainsi d'après la question 8 et la définition de q on a :

$$\frac{2}{n(n-1)} \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{x_i x_j} \leq a - \frac{1}{n-1} q$$

Ainsi on a par transitivité :

$$g \leq a - \frac{1}{n-1}q$$

On a donc bien :

$$\boxed{a - g \geq \frac{1}{n-1}q}$$