Lycée Condorcet Octobre 2024
PCSI

Nombres complexes

Table des matières

1 Forme algébrique d'un nombre complexe

1.1 L'ensemble $\mathbb{C}$, muni des lois $+$ et $\times$

Les nombres complexes ont d'abord été utilisés pour trouver des racines réelles de polynômes réelles. Alors appelés nombre impossible, il était inconcevable que ces nombres existent.
Appelés nombres imaginaires par R. Descartes, leur utilisation, puis leur représentation géométrique se sont généralisés avant d'aboutir a une construction formelle par William Rowan Hamilton (1805–1865).

Définition 1.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a + \mathbf{i}b$.
   Le nombre réel a s'appelle la **partie réelle** de z. On note $a = \mathrm{Re}(z)$.
   Le nombre réel b s'appelle la **partie imaginaire** de z. On note $b = \mathrm{Im}(z)$.
2. Si $M = (x, y)$ est un point du plan $\mathbb{R}^2$, le nombre complexe $x + \mathbf{i}y$ s'appelle **l'affixe** de M dans le plan complexe.
3. Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ on définit l'addition et la multiplication comme suit :

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

• **Remarques**

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ peut être vu comme un sous-ensemble de $\mathbb{C}$ en identifiant tout $x \in \mathbb{R}$ avec le nombre complexe $x + i0$. De cette manière les lois $+$ et $\times$ prolongent l'addition et la multiplicaition dans $\mathbb{R}$.
2. En calculant $(0 + i1)^2$ on retrouve bien $i^2 = -1$.

Méthode.

On a pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$:

$$z = z' \Longleftrightarrow \mathrm{Re}\, z = \mathrm{Re}\, z' \text{ et } \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$$

• **Remarques**

1. La partie imaginaire d'un nombre complexe est un nombre **réel** !
2. Les propriétés de l'addition (élément neutre (0), commutativité, associativité, existence d'un opposé) sont bien connues. Donnons les propriétés de la multiplication.

Proposition 2 (Propriétés de la multiplication dans $\mathbb{C}$)**.**

1. La multiplication est
   — commutative : $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2,\ z_1 z_2 = z_2 z_1$
   — associative : $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
   — distributive sur l'addition : $\forall (z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3,\ z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.
2. Le nombre 1 est neutre pour la multiplication : $\forall z \in \mathbb{C},\ z \times 1 = 1 \times z = z$.
3. Tout élément <u>non nul</u> z de $\mathbb{C}$ admet un inverse pour la multiplication. On le note $\dfrac{1}{z}$.

Démonstration : Soit $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Il existe $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$. Comme $z \neq 0$, on a $(x,y) \neq (0,0)$, et donc $x^2+y^2 \neq 0$. En posant $z' = \dfrac{x}{x^2+y^2} + \mathbf{i}\dfrac{-y}{x^2+y^2}$, on a

$$\begin{aligned} zz' = z'z &= \left(x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - y \cdot \frac{-y}{x^2+y^2}\right) + \mathbf{i}\left(x \cdot \frac{-y}{x^2+y^2} + y \cdot \frac{x}{x^2+y^2}\right) \\ &= 1. \end{aligned}$$

■

Exemple 1

Donner l'écriture algébrique des complexes suivants :

$$z_1 = \frac{3+6i}{3-4i}; \quad z_2 = \frac{1+i}{2-i} + \frac{3+6i}{3-4i};$$

Définition 3.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Notons $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$.
Le **conjugué** du nombre complexe $z = x + \mathbf{i}y$ est le nombre complexe noté $\overline{z}$, défini par

$$\overline{z} = x - \mathbf{i}y.$$

- **Remarque**

Si M est un point d'affixe z alors le point d'affixe $\bar{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe des abscisses.

Proposition 4.

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ \overline{\overline{z}} = z$.
2. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.
3. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C},\ \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}$.
4. $\forall z \in \mathbb{C}^*,\ \overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$.
5. $\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$.
6. $\forall z \in \mathbb{C},\ z \in \mathbf{i}\mathbb{R} \iff z = -\overline{z}$.
7. $\forall z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = \dfrac{z + \overline{z}}{2},\ \mathrm{Im}(z) = \dfrac{z - \overline{z}}{2\mathbf{i}}$.

Exemple 2

Donner l'écriture algébrique du complexe : $z_3 = \dfrac{2+5i}{1-i} + \dfrac{2-5i}{1+i}$

Exemple 3

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

1. Montrer que $\overline{z} = \frac{1}{z}$.
2. En déduire que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

1.2 Module

Définition 5.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = x + \mathbf{i}y$.
Le **module** de z est le nombre réel positif ou nul noté $|z|$, défini par

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- **Remarque**

Dans la correspondance complexes-géométrie, le module mesure la distance.

1. Si M est un point du plan d'affixe z, le module de z est égal à la distance de M au centre du repère.
2. Si M et M' sont deux point du plan respectivement de module z et z', le module $|z - z'|$ est la longueur du segment $[M, M']$.

- **Dessin. Exemples.**

Proposition 6.

1. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0.$
2. $\forall z \in \mathbb{C},\ |-z| = |z| = |\overline{z}|.$
3. $\forall z \in \mathbb{C},\ |z|^2 = z\overline{z}.$
4. Le module prolonge la valeur absolue déjà définie sur $\mathbb{R}$.
5. $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ |x| = x$, donc : $\forall z \in \mathbb{C},\ \big||z|\big| = |z|.$
6. $\forall z \in \mathbb{C},\ |\mathrm{Re}\, z| \leq |z|,\ |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|.$

Proposition 7.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$.

1. On a $|zz'| = |z||z'|$.
2. Supposons $z' \neq 0$. Alors $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Proposition 8.

Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2$. Alors

1. $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (inégalité triangulaire)
2. $\big||z| - |z'|\big| \leq |z - z'|$ (inégalité triangulaire renversée)

• **Remarque**. On peut démontrer que pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, on a l'équivalence : $|z + z'| = |z| + |z'|$ si et seulement si $z = 0$ ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z' = \alpha z$. Autrement dit, il y a égalité dans l'inégalité triangulaire si et seulement si z et z' sont positivement liés.

Corollaire 9.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout nombres complexes $z_1, \cdots, z_n$, on a :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

2 Forme exponentielle

2.1 Nombres complexes de module 1

Définition 10.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1.

Exercice 4.

Soit $\omega \in \mathbb{U}$, montrer que ω est inversible et que

$$\frac{1}{\omega} = \overline{\omega}$$

L'ensemble des points dans le plan dont l'affixe est dans $\mathbb{U}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. De sorte que les fonctions sin et cos permettent de paramétrer l'ensemble.

Proposition 11.

Pour tout $\omega \in \mathbb{U}$, il existe un nombre réel θ tel que $\omega = \cos\theta + i\sin\theta$.

C'est en partie ce qui explique l'intérêt de la notation suivante :

Définition 12.

Pour $\theta \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{e^{\mathbf{i}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta).}$$

Attention !.

Ici le $e^{\cdots}$ ne représente pas la fonction exponentielle réelle. Il s'agit d'une **nouvelle notation**.
Bien sûr cette notation n'a pas été choisie par hasard, mais la fonction exponentielle que vous connaissez n'est définie que sur les nombres réels et pas sur les complexes.

Proposition 13.

$$\forall(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2 \qquad e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \theta \equiv \theta'[2\pi]$$

- Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\left|e^{\mathbf{i}\theta}\right| = 1$, autrement dit le point d'affixe $e^{\mathbf{i}\theta}$ est sur le cercle trigonométrique.

- Inversement, si z est un nombre complexe de module 1 (i.e. $|z| = 1$), alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{\mathbf{i}\theta}$ (et si θ convient, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ convient également). Ainsi tous les points du cercle trigonométrique ont une affixe de la forme $e^{i\theta}$.

Proposition 14 (Formules d'Euler)**.**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a
$$\cos\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} + e^{-\mathbf{i}\theta}}{2}, \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathbf{i}\theta} - e^{-\mathbf{i}\theta}}{2\mathbf{i}}.$$

Proposition 15.

1. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
3. Pour tout $(\theta,\theta') \in \mathbb{R}^2$, $e^{\mathbf{i}(\theta+\theta')} = e^{\mathbf{i}\theta}e^{\mathbf{i}\theta'}$.

Proposition 16 (Formule de Moivre)**.**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $e^{\mathbf{i}n\theta} = \left(e^{\mathbf{i}\theta}\right)^n$, autrement dit
$$\cos(n\theta) + \mathbf{i}\sin(n\theta) = \left(\cos(\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta)\right)^n.$$

Ce sont évidement ces deux propriétés (la proprosition 11 et la formule de Moivre) qui ont inspiré la notation sous forme d'exponentielle. En effet, les nombres sous la forme $\cos\theta + i\sin\theta$ vérifient, dans les complexes, des propriétés similaires à celles vérifiées par l'exponentielle.

Les trois exemples suivants sont des applications classiques et directes des propositions précédentes. Ils mettent en jeu des méthodes classiques à savoir réutiliser :

Exemple 5 Méthode de l'angle moitié

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer le module des complexes $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

Exemple 6 Linéarisation des puissances de $\sin$ et $\cos$

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Linéariser $\cos^3 \theta$, c'est à dire exprimer $\cos^3 \theta$ en fonction de cosinus.

Exemple 7 Expression $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ à l'aide de puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos 4\theta$ à l'aide de puissances de $\cos\theta$.

2.2 Arguments d'un nombre complexe non nul

- Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Posons $\rho = |z| \in \mathbb{R}_+^*$. Le nombre complexe $\dfrac{z}{\rho}$ est de module 1, donc il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{z}{\rho} = e^{\mathrm{i}\theta}$, c'est à dire

$$\boxed{z = \rho e^{\mathbf{i}\theta}.}$$

Un tel réel θ s'appelle **un argument** du nombre complexe z.

- Remarquer que l'on dit « un » argument. Si θ est un argument de z, alors pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\theta + 2k\pi$ est aussi un argument de z.

- Le nombre complexe 0 n'a pas d'argument. Pour tout réel θ, on peut écrire $0 = 0 \cdot e^{\mathbf{i}\theta}$.

Proposition 17.

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls. Soient $(\rho_1, \rho_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z_1 = \rho_1 e^{\mathbf{i}\theta_1}$ et $z_2 = \rho_2 e^{\mathbf{i}\theta_2}$. On a l'équivalence

$$z_1 = z_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \big(\rho_1 = \rho_2\big) \text{ et } \big(\theta_1 \equiv \theta_2 \ [2\pi]\big).$$

Exemple 8

Donner une écriture exponentielle des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+i}{1-i}, \qquad z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} + i}$$

Définition 18.

Parmi l'inifinité d'arguments d'un même nombre complexe non nul z, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle **argument principal** de z et on le note $\arg(z)$.

Proposition 19.

1. $\forall z \in \mathbb{C}^*, \arg(\overline{z}) \equiv -\arg(z) \quad [2\pi]$;
2. Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\quad \arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$;
3. Si z et $z' \in \mathbb{C}^*$, $\quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$;
4. Si $z \in \mathbb{C}^*$, $\quad \arg(-z) \equiv \arg(z) + \pi \quad [2\pi]$;

3 Équations algébriques

3.1 Racines carrées d'un complexe

Définition 20.

Soit $a \in \mathbb{C}$. Une **racine carrée** de a est un nombre complexe z tel que $z^2 = a$.

Proposition 21.

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées et sont opposées.

La démonstration de cette proposition ce fait en utilisant une des deux méthode suivantes.

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$.
Trouver les racines carrées de z_0 revient à résoudre l'équation $z^2 = z_0$, d'inconnue complexe z.
Deux méthodes sont possibles. Elles utilisent les différentes façons d'écrire un complexe, la forme algébrique et la forme exponentielle.

Méthode (Résolution utilisant la forme algébrique)**.**

Écrivons le complexe z_0 sous forme algébrique. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$z_0 = a + ib$$

Pour résoudre cette équation nous allons raisonner par équivalences.
Soit $z \in \mathbb{C}$. Il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = \alpha + i\beta$. Résoudre l'équation revient alors à trouver α et β. On a les équivalences :

$$z^2 = z_0 \iff (\alpha + i\beta)^2 = a + ib \iff \alpha^2 - \beta^2 + 2i\alpha\beta = a + ib$$

Donc par identification de deux complexes sous forme algébrique, on a :

$$z^2 = z_0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha^2 - \beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \end{array} \right.$$

Par ailleurs, si $z^2 = z_0$, alors en prenant les modules, on obtient $\alpha^2 + \beta^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$. On a donc, en reprenant les équivalences précédentes :

$$z^2 = z_0 \iff \left\{ \begin{array}{ccc} \alpha^2 + \beta^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha^2 - \beta^2 & = & a \\ 2\alpha\beta & = & b \end{array} \right.$$

En pratique, ce système permet de déterminer rapidement les valeurs de α et β.

Exemple 9

Résoudre l'équation : $z^2 = -8 + 6i$

Méthode (Résolution utilisant la forme exponentielle).

Écrivons le complexe z_0 sous forme exponentielle. Soit donc $\rho_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tels que :

$$z_0 = \rho_0 e^{i\theta_0}$$

Procédons par équivalence.
Soit $z \in \mathbb{C}$, et soit $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tels que $z = \rho e^{i\theta}$. Résoudre l'équation revient ici à trouver ρ et θ. Nous avons les équivalences :

$$z^2 = z_0 \iff \left(\rho e^{i\theta}\right)^2 = \rho_0 e^{i\theta_0} \iff \rho^2 e^{i2\theta} = \rho_0 e^{i\theta_0}$$

Donc par identification de deux complexes sous forme exponentielle (proposition 13) on a :

$$z^2 = z_0 \quad \iff \quad \left\{ \begin{array}{lcl} \rho^2 & = & \rho_0 \\ 2\theta & \equiv & \theta_0 \quad [2\pi] \end{array} \right.$$

Le réel ρ cherché étant un réel strictement positif, il n'y a qu'une seule solution à la première équation. Pour la deuxième équation on procède comme décrit au paragraphe précédent et comme $e^{i\pi} = -1$ et on obtient :

$$z^2 = z_0 \quad \iff \quad z = \sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}} \text{ ou } z = -\sqrt{\rho_0} e^{i\frac{\theta_0}{2}}$$

Remarque
Le problème de cette méthode est bien sûr de pouvoir trouver explicitement la forme exponentielle de z_0 !

Exemple 10

1. Résoudre, avec les deux méthodes précédentes l'équation : $z^2 = 1 + i$
2. En déduire la valeur de $\sin \frac{\pi}{8}$.

3.2 Équations polynômiales complexes de degré 2

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. On cherche à résoudre l'équation

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Autrement dit, on cherche les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$.

Attention !.

Ici les coefficients du polynôme sont complexes et non pas seulement réels.

- On pose $\Delta = b^2 - 4ac$. On vérifie alors que pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$az^2 + bz + c = a\Big(\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big).$$

- On en déduit les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\iff \quad a\Big(\big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big) = 0 \\ &\iff \quad \big(z + \frac{b}{2a}\big)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}. \end{aligned}$$

- Il faut trouver un nombre complexe δ tel que $\delta^2 = \Delta$. On a vu comment faire au paragraphe précédent. Alors, pour $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} az^2 + bz + c = 0 \quad &\iff \quad \left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{2a}\right)^2 \\ &\iff \quad z + \frac{b}{2a} = \frac{\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z + \frac{b}{2a} = -\frac{\delta}{2a} \\ &\iff \quad z = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{ou} \quad z = \frac{-b-\delta}{2a}. \end{aligned}$$

On a ainsi résolu l'équation. On peut aussi écrire le résultat sous la forme suivante : dans $\mathbb{C}[X]$,

$$aX^2 + bX + c = a\left(X - \frac{-b+\delta}{2a}\right)\left(X - \frac{-b-\delta}{2a}\right).$$

Proposition 22.

Avec les notations utilisées dans ce paragraphe.
L'équation (E) admet deux solutions (ou une solution double si $\Delta = 0$) qui sont

$$\frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{et} \quad \frac{-b-\delta}{2a}.$$

Exemple 11

Résoudre l'équation $9z^2 - 3(3-\mathbf{i})z + 4 - 3\mathbf{i} = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Proposition 23 (Relations coefficients-racines)**.**

Soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Les assertions 1. et 2. sont équivalentes.

1. z_1 et z_2 sont les solutions de l'équations $az^2 + bz + c = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.
2. $z_1 + z_2 = -\dfrac{b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

Exemple 12

Factoriser sans calcul les polynômes suivants :

$$z^2 - 3z + 2, \qquad z^2 - (2+i)z + 1 + i$$

3.3 Racines $n^{\text{èmes}}$ d'un nombre complexe

3.3.1 Racine de l'unité

Définition 24.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine n-ième de l'unité** tout nombre complexe tel que $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.

Proposition 25.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe exactement n racines n-ième de l'unité, qui sont, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ les $\xi_k = e^{2ik\pi/n}$. Ainsi :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

Nous allons en fait montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{U}_n = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{e^{2ik\pi/n} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$

• Interprétation géométrique :

Exercice 13.

Résoudre l'équation d'inconnue complexe z :

$$(z+i)^n = (z-i)^n$$

Proposition 26.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Si on note $\xi_1 = e^{2i\pi/n}$, les racines n-ième de l'unité sont $1, \xi_1, \xi_1^2, \cdots, \xi_1^{n-1}$.
2. Si ξ est une racine n-ième de l'unité différente de 1 alors on a :

$$1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$$

3. La somme des racines n-ième de l'unité est égale à 0.

3.3.2 Racines n-ième d'un complexe

Définition 27.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $Z \in \mathbb{C}^*$. On appelle **racine n-ième de** Z tout complexe z tel que $z^n = Z$.

Proposition 28.

Soit $Z \in \mathbb{C}^*$, alors Z admet exactement n racines n-ièmes.

Si z_0 est une racine n-ième de Z, les racines n-ième de Z sont $z_0 e^{2ik\pi/n}, k \in [\![0, n-1]\!]$.

Si $Z = \rho e^{i\alpha}$, où ρ est le module de Z et α un argument, alors $z_0 = \rho^{1/n} e^{i\alpha/n}$ est une racine n-ième de Z.

Exemple 14

Résoudre l'équation d'inconnue complexe : $z^4 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

4 Exponentielle complexe

Définition 29.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On définit l'**exponentielle complexe** par

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a(\cos b + i \sin b)$$

Exemple 15

$$\exp(\ln 2 + i\pi/2) = 2i$$

Proposition 30.

1. On a $|\exp(z)| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ et $\mathrm{Im}(z)$ est un argument de $\exp(z)$.
2. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z + z') = \exp(z)\exp(z')$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$.
4. Pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $z - z' = 2i\pi k$.

5 Fonctions à valeurs complexes

On peut définir une fonction à valeurs complexes de la même façon qu'une fonctions réelles. L'ensemble d'arrivée doit seulement être un sous-ensemble de $\mathbb{C}$.
On peut alors définir comme on l'a fait pour les fonctions réelles les opérations sur ces fonctions.
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On pose alors les définitions suivantes :

Définition 31.

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction à valeurs complexes. On dit que f est **dérivable** sur I si les fonctions $\mathrm{Re}(f) : x \mapsto \mathrm{Re}(f(x))$ et $\mathrm{Im}(f) : x \mapsto \mathrm{Im}(f(x))$ sont toutes les deux dérivables sur I.
La dérivée de f est alors définie comme la fonction :

$$f' : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ x & \mapsto & \mathrm{Re}(f)'(x) + i\,\mathrm{Im}(f)'(x) \end{array} \right.$$

Proposition 32.

Soit $\varphi : I \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable sur I. Soit f la fonction définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} I & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & e^{\varphi(t)} \end{array} \right.$$

La fonction f est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = \varphi'(t)e^{\varphi(t)}$$

Démonstration : Notons $a : t \mapsto \mathrm{Re}(\varphi(t))$ et $b : t \mapsto \mathrm{Im}(\varphi(t))$, définies sur I. On a,

$$\forall t \in I \quad f(t) = e^{a(t)}e^{ib(t)} = e^{a(t)}(\cos(b(t)) + i \sin(b(t))).$$

On a donc que $\mathrm{Re}(f) = e^a \cos b$ et $\mathrm{Im}(f) = e^a \sin b$/ La fonction a est dérivable sur I, exp l'est sur $\mathbb{R}$ donc la composée $e^a : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I. De même, les deux fonctions à valeurs réelles $\cos b$ et $\sin b$ sont des composées dérivables sur I. Par produit, on obtient que $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables sur I. On peut donc dire, conformément à la dernière définition, que f est dérivable sur I. On a

$$\begin{aligned} f' = \mathrm{Re}(f)' + i\,\mathrm{Im}(f)' &= (a'e^a\cos b - b'e^a\sin b) + i(a'e^a\sin b + b'e^a\cos b) \\ &= e^a\left[a'(\cos b + i\sin b) + ib'(\cos b + i\sin b)\right] \\ &= (a' + ib')e^a e^{ib} = \varphi' e^{\varphi} \end{aligned}$$

■

6 Nombres complexes et géométrie plane

6.1 Alignement et orthogonalité

On travaille ici dans le plan muni d'un repère orthormé centré en O.

Définition 33.

Si A et B sont deux points du plan d'affixes respectives z_A et z_B, on appelle **affixe du vecteur** $\overrightarrow{AB}$ le nombre complexe $z_B - z_A$. Il s'agit de l'affixe du point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Proposition 34.

Soient A, B, C D quatre points du plan distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. le réel

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$.

Corollaire 35.

Soient A, B, C et D quatre points distincts deux à deux d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. On a

1. les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}$.
2. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$.

Démonstration : Les droites (AB) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaire. Cela arrive si et seulement si 0 est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ (vecteurs colinéaires de même sens) ou si π est en est une (vecteurs colinéaires, de sens opposé). On a donc

$$(AB) \parallel `CD) \Longleftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0 \text{ ou } \pi \Longleftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}.$$

En particulier cela donne une condition d'alignement pour trois points A, B et C distincts deux à deux, car A, B, C sont alignés si et seulement si $(AB) \parallel (AC)$.
Enfin les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux, c'est à dire si $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$. On a donc :

$$(AB) \perp (CD) \Longleftrightarrow \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2}\right) \Longleftrightarrow \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R}$$

■

Remarque
Du 1 du corollaire on déduit que trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\dfrac{z_C - z_B}{z_B - z_A}$ est un réel.

Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & f(z) \end{array} \right.$ une application sur l'ensemble des nombres complexes. Si M est d'affixe z, f permet de lui associer naturellement un point M' d'affixe $f(z)$. On peut donc voir f comme une transformation du plan.
La proposition suivante résume les faits géométriques collectés dans ce cours.

Proposition 36.

- Si $\theta \in \mathbb{R}$, la transformation $z \mapsto e^{i\theta} z$ est la **rotation** de centre O et d'angle θ.
- Si $b \in \mathbb{C}$, la transformation $z \mapsto z + b$ est la **translation** de vecteur $\overrightarrow{OB}$ où B est d'affixe b.
- Si $k \in \mathbb{R}$ la transformation $z \mapsto kz$ est dite **homothétie** de rapport k.
- la transformation $z \mapsto \overline{z}$ est la **symétrie** d'axe l'axe des abscisses.